

**7 hằng đẳng thức đáng nhớ** là những hằng đẳng thức không còn xa lạ với các bạn nữa, Hôm nay THPT CHUYÊN LAM SƠN sẽ nói kỹ hơn về 7 hằng đẳng thức quan trọng là : bình phương của một tổng, bình phương của một hiệu, hiệu của hai bình phương, lập phương của một tổng, lập phương của một hiệu, tổng hai lập phương và cuối cùng là hiệu hai lập phương.

## Nội Dung



- Chi tiết 7 hằng đẳng thức đáng nhớ như sau
  - 1. Bình phương của một tổng
  - 2. Bình phương của một hiệu
  - 3. Hiệu hai bình phương
  - 4. Lập phương của một tổng
  - 5. Lập phương của một hiệu
  - 6. Tổng hai lập phương
  - 7. Hiệu hai lập phương
  - Hằng đẳng thức mở rộng
- Một số bài tập áp dụng bảy hằng đẳng thức đáng nhớ

**Chi tiết 7 hằng đẳng thức đáng nhớ như sau**

- $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$  (1)

- $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$  (2)

- $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$  (3)

- $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$  (4)

$$= A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$$

- $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$  (5)

$$= A^3 - B^3 - 3AB(A - B)$$

- $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$  (6)

- $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$  (7)

## 1. Bình phương của một tổng

=> Bình phương của một tổng sẽ bằng bình phương của số thứ nhất cộng hai lần tích của số thứ nhất và số thứ hai, sau đó cộng với bình phương của số thứ hai.

Ta có  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

\* Ví dụ Bài 16 trang 11 sgk toán 8 tập 1: Viết dưới dạng bình phương của 1 tổng hoặc 1 hiệu

a)  $x^2 + 2x + 1 = (x)^2 + 2.(x).(1) + (1)^2 = (x+1)^2$

b)  $9x^2 + y^2 + 6xy = 9x^2 + 6xy + y^2 = (3x)^2 + 2.(3x).(y) + (y)^2 = (3x+y)^2$

## 2. Bình phương của một hiệu

=> Bình phương của một hiệu sẽ bằng bình phương của số thứ nhất trừ đi hai lần tích của số thứ nhất và số thứ hai, sau đó cộng với bình phương của số thứ hai.

Ta có  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

\* Ví dụ Bài 16 trang 11 sgk toán 8 tập 1: Viết dưới dạng bình phương của 1 tổng hoặc 1 hiệu

$$c) 25a^2 + 4b^2 - 20ab = 25a^2 - 20ab + 4b^2 = (5a)^2 - 2.(5a).(2b) + (2b)^2 = (5a+2b)^2$$

d)

$$x^2 - x + \frac{1}{4}$$

$$= (x)^2 - 2.(x).\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

### 3. Hiệu hai bình phương

=> Hiệu của hai bình phương của hai số sẽ bằng hiệu của hai số đó nhân với tổng của hai số đó.

Ta có  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

\* Ví dụ: Viết dưới dạng tích biểu thức:  $4x^2 - 9$

\* Lời giải:

$$- \text{Ta có: } 4x^2 - 9 = (2x)^2 - (3)^2 = (2x-3)(2x+3)$$

### 4. Lập phương của một tổng

=> Lập phương của một tổng của hai số sẽ bằng lập phương của số thứ nhất cộng với ba lần tích của bình phương số thứ nhất nhân cho số thứ hai, cộng với ba lần tích của số thứ nhất nhân với bình phương của số thứ hai, rồi sau đó cộng với lập phương của số thứ hai.

Ta có  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

\* Ví dụ Bài 26 trang 14 sgk toán 8 tập 1: Tính

$$\begin{aligned} \text{a) } (2x^2+3y)^3 &= (2x^2)^3 + 3(2x^2)^2 \cdot (3y) + 3(2x^2) \cdot (3y)^2 + (3y)^3 \\ &= 8x^6 + 36x^4y + 54x^2y^2 + 27y^3 \end{aligned}$$

## 5. Lập phương của một hiệu

=> Lập phương của một hiệu của hai số sẽ bằng lập phương của số thứ nhất trừ đi ba lần tích của bình phương số thứ nhất nhân cho số thứ hai, cộng với ba lần tích của số thứ nhất nhân với bình phương của số thứ hai, rồi sau đó trừ đi lập phương của số thứ hai.

Ta có  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

\* Ví dụ Bài 26 trang 14 sgk toán 8 tập 1: Tính

$$\begin{aligned} \text{b) } & \left(\frac{1}{2}x - 3\right)^3 \\ &= \left(\frac{1}{2}x\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}x\right)^2 (3) + 3\left(\frac{1}{2}x\right) (3)^2 - (3)^3 \\ &= \frac{1}{8}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{27}{2}x - 27 \end{aligned}$$

## 6. Tổng hai lập phương

=> Tổng của hai lập phương của hai số sẽ bằng tổng của số thứ nhất cộng với số thứ hai, sau đó nhân với bình phương thiếu của tổng số thứ nhất và số thứ hai.

Ta có  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

\* Ví dụ: Viết dưới dạng tích  $x^3 + 64$

$$x^3 + 64 = x^3 + 4^3 = (x+4)(x^2-4x+16)$$

## 7. Hiệu hai lập phương

=> Hiệu của hai lập phương của hai số sẽ bằng hiệu của số thứ nhất trừ đi số thứ hai, sau đó nhân với bình phương thiếu của tổng số thứ nhất và số thứ hai.

Ta có  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

\* Ví dụ: Viết dưới dạng tích  $8x^3 - y^3$

$$8x^3 - y^3 = (2x)^3 - y^3 = (2x - y)[(2x)^2 - (2x) \cdot y + y^2] = (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$$

\* Chú ý:  $a + b = -(-a - b)$  ;  $(a + b)^2 = (-a - b)^2$  ;  $(a - b)^2 = (b - a)^2$  ;  $(a + b)^3 = -(-a - b)^3$  ;  $(a - b)^3 = -(-a + b)^3$

=> Đây là 7 đẳng thức này được sử dụng thường xuyên trong các bài toán liên quan đến giải phương trình, nhân chia các đa thức, biến đổi biểu thức tại cấp học trung học cơ sở và trung học phổ thông. Học thuộc bảy hằng đẳng thức đáng nhớ giúp giải nhanh những bài toán phân tích đa thức thành nhân tử.

## Hằng đẳng thức mở rộng

Ngoài ra, người ta đã suy ra được các hằng đẳng thức mở rộng liên quan đến các hằng đẳng thức trên:

1.  $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$
2.  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
3.  $(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca$
4.  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
5.  $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca$

Đây là những hằng đẳng thức rất quan trọng chính vì vậy các em cần nhớ rõ trong đầu để mỗi khi làm bài tập về nhân chia các đa thức, biến đổi biểu thức tại cấp học trung học cơ sở và trung học phổ thông.

**Một số bài tập áp dụng bảy hằng đẳng thức đáng nhớ**

### **Dạng 1 : Tính giá trị của biểu thức**

Ví dụ: Tính giá trị của biểu thức :  $A = x^2 - 4x + 4$  tại  $x = -1$

\* Lời giải.

– Ta có :  $A = x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2.x.2 + 2^2 = (x - 2)^2$

– Tại  $x = -1$  :  $A = ((-1) - 2)^2 = (-3)^2 = 9$

⇒ Kết luận: Vậy tại  $x = -1$  thì  $A = 9$

### **Dạng 2 : Chứng minh biểu thức A không phụ thuộc vào biến**

Ví dụ: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào  $x$ :  $A = (x - 1)^2 + (x + 1)(3 - x)$

\* Lời giải.

– Ta có :  $A = (x - 1)^2 + (x + 1)(3 - x) = x^2 - 2x + 1 - x^2 + 3x + 3 - x = 4$  : hằng số không phụ thuộc vào biến  $x$ .

### **Dạng 3 : Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức**

Ví dụ: Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $A = x^2 - 2x + 5$

\* Lời giải:

– Ta có :  $A = x^2 - 2x + 5 = (x^2 - 2x + 1) + 4 = (x - 1)^2 + 4$

– Vì  $(x - 1)^2 \geq 0$  với mọi  $x$ .

⇒  $(x - 1)^2 + 4 \geq 4$  hay  $A \geq 4$

– Vậy giá trị nhỏ nhất của  $A = 4$ , Dấu “=” xảy ra khi :  $x - 1 = 0$  hay  $x = 1$

⇒ Kết luận GTNN của  $A$  là:  $A_{\min} = 4 \Leftrightarrow x = 1$

### **Dạng 4 : Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức**

Ví dụ: Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:  $A = 4x - x^2$

\* Lời giải:

$$- \text{Ta có : } A = 4x - x^2 = 4 - 4 + 4x - x^2 = 4 - (4 - 4x + x^2) = 4 - (x^2 - 4x + 4) = 4 - (x - 2)^2$$

$$- \text{Vì } (x - 2)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x \Leftrightarrow -(x - 2)^2 \leq 0 \text{ với mọi } x$$

$$\Leftrightarrow 4 - (x - 2)^2 \leq 4 \text{ [cộng 2 vế với 4]}$$

$$\Leftrightarrow A \leq 4 \text{ Dấu "}" xảy ra khi : } x - 2 = 0 \text{ hay } x = 2$$

$$\Rightarrow \text{Kết luận GTLN của } A \text{ là: } A_{\max} = 4 \Leftrightarrow x = 2.$$

### **Dạng 5 : Chứng minh đẳng thức bằng nhau**

Ví dụ: Chứng minh đẳng thức sau đúng:  $(a + b)^3 - (a - b)^3 = 2b(3a^2 + b^2)$

\* Lời giải:

- Đối với dạng toán này chúng ta biến đổi VT = VP hoặc VT = A và VP = A

$$- \text{Ta có: } VT = (a + b)^3 - (a - b)^3$$

$$= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) - (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$$

$$= 6a^2b + 2b^3$$

$$= 2b(3a^2 + b^2) = VP \text{ (đpcm).}$$

$$\Rightarrow \text{Kết luận, vậy : } (a + b)^3 - (a - b)^3 = 2b(3a^2 + b^2)$$

### • Dạng 6 : Chứng minh bất đẳng thức

- Biến đổi bất đẳng thức về dạng biểu thức  $A \geq 0$  hoặc  $A \leq 0$ . Sau đó dùng các phép biến đổi đưa A về 1 trong 7 hằng đẳng thức.

Ví dụ 1: Chứng minh biểu thức A nhận giá trị dương với mọi giá trị của biến, biết:  $A = x^2 - x + 1$

\* Lời giải:

- Ta có:

$$A = x^2 - x + 1$$

$$= (x)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

- Vì

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \forall x$$

nên

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq 0, \forall x$$

### Dạng 7: Phân tích đa thức thành nhân tử

Ví dụ 1: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:  $A = x^2 - 4x + 4 - y^2$

\* Lời giải:

- Ta có :  $A = x^2 - 4x + 4 - y^2$  [để ý  $x^2 - 4x + 4$  có dạng hằng đẳng thức]

$$= (x^2 - 4x + 4) - y^2 \text{ [nhóm hạng tử]}$$

$$= (x - 2)^2 - y^2 \text{ [xuất hiện đẳng thức số } A^2 - B^2]$$

$$= (x - 2 - y)(x - 2 + y)$$



$$\Rightarrow A = (x - 2 - y)(x - 2 + y)$$

### **Dạng 8: Tìm giá trị của x**

Ví dụ: Tìm giá trị của x biết:  $x^2(x - 3) - 4x + 12 = 0$

\* Lời giải.

$$x^2(x - 3) - 4x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x - 3) - 4(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3) = 0 \text{ hoặc } (x - 2) = 0 \text{ hoặc } (x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = 2 \text{ hoặc } x = -2$$

$\Rightarrow$  Kết luận, vậy nghiệm :  $x = 3; x = 2; x = -2$