

**MỤC LỤC**

<b>PHẦN A. CÂU HỎI</b> .....	<b>2</b>
Dạng 1. Nguyên hàm cơ bản (dùng bảng nguyên hàm) .....	<b>2</b>
Dạng 1.1 Tìm nguyên hàm cơ bản không có điều kiện.....	<b>2</b>
Dạng 1.2 Tìm nguyên hàm cơ bản có điều kiện.....	<b>11</b>
Dạng 2. Sử dụng phương pháp VI PHÂN để tìm nguyên hàm .....	<b>16</b>
Dạng 2.1 Tìm nguyên hàm không có điều kiện.....	<b>16</b>
Dạng 2.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện.....	<b>17</b>
Dạng 3. Sử dụng phương pháp ĐỔI BIẾN để tìm nguyên hàm.....	<b>18</b>
Dạng 3.1 Tìm nguyên hàm không có điều kiện.....	<b>18</b>
Dạng 3.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện.....	<b>21</b>
Dạng 4. Nguyên hàm từng phần.....	<b>22</b>
Dạng 4.1 Tìm nguyên hàm không có điều kiện.....	<b>22</b>
Dạng 4.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện.....	<b>25</b>
Dạng 5. Sử dụng nguyên hàm để giải toán.....	<b>26</b>
Dạng 6. Một số bài toán khác liên quan đến nguyên hàm.....	<b>30</b>
<b>PHẦN B. ĐÁP ÁN THAM KHẢO</b> .....	<b>33</b>
Dạng 1. Nguyên hàm cơ bản (dùng bảng nguyên hàm) .....	<b>33</b>
Dạng 1.1 Tìm nguyên hàm cơ bản không có điều kiện.....	<b>33</b>
Dạng 1.2 Tìm nguyên hàm cơ bản có điều kiện.....	<b>38</b>
Dạng 2. Sử dụng phương pháp VI PHÂN để tìm nguyên hàm .....	<b>44</b>
Dạng 2.1 Tìm nguyên hàm không có điều kiện.....	<b>44</b>
Dạng 2.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện.....	<b>45</b>
Dạng 3. Sử dụng phương pháp ĐỔI BIẾN để tìm nguyên hàm.....	<b>47</b>
Dạng 3.1 Tìm nguyên hàm không có điều kiện.....	<b>47</b>
Dạng 3.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện.....	<b>51</b>
Dạng 4. Nguyên hàm từng phần.....	<b>53</b>
Dạng 4.1 Tìm nguyên hàm không có điều kiện.....	<b>53</b>
Dạng 4.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện.....	<b>57</b>
Dạng 5. Sử dụng nguyên hàm để giải toán.....	<b>60</b>
Dạng 6. Một số bài toán khác liên quan đến nguyên hàm.....	<b>69</b>

## PHẦN A. CÂU HỎI

### Dạng 1. Nguyên hàm cơ bản (dùng bảng nguyên hàm)

#### Dạng 1.1 Tìm nguyên hàm cơ bản không có điều kiện

Câu 1. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^4 + x^2$  là

- A.  $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$       B.  $x^4 + x^2 + C$       C.  $x^5 + x^3 + C$ .      D.  $4x^3 + 2x + C$

Câu 2. (Mã đề 104 - BGD - 2019) Họ tất cả nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2x + 4$  là

- A.  $x^2 + C$ .      B.  $2x^2 + C$ .      C.  $2x^2 + 4x + C$ .      D.  $x^2 + 4x + C$ .

Câu 3. (Mã 102 - BGD - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2x + 6$  là

- A.  $x^2 + C$ .      B.  $x^2 + 6x + C$ .      C.  $2x^2 + C$ .      D.  $2x^2 + 6x + C$ .

Câu 4. (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2 \sin x$ .

A.  $\int 2 \sin x dx = -2 \cos x + C$       B.  $\int 2 \sin x dx = 2 \cos x + C$

C.  $\int 2 \sin x dx = \sin^2 x + C$       D.  $\int 2 \sin x dx = \sin 2x + C$

Câu 5. (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^3 + x$  là

- A.  $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$       B.  $3x^2 + 1 + C$       C.  $x^3 + x + C$       D.  $x^4 + x^2 + C$

Câu 6. (Mã 103 - BGD - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2x + 3$  là

- A.  $x^2 + 3x + C$ .      B.  $2x^2 + 3x + C$ .      C.  $x^2 + C$ .      D.  $2x^2 + C$ .

Câu 7. (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt{2x-1}$ .

A.  $\int f(x) dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$ .      B.  $\int f(x) dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$ .

C.  $\int f(x) dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$ .      D.  $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$ .

Câu 8. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$ .

A.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$ .

B.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$ .

$$C. \int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C.$$

$$D. \int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C.$$

Câu 9. (MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{5x-2}$ .

$$A. \int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C$$

$$B. \int \frac{dx}{5x-2} = \ln|5x-2| + C$$

$$C. \int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2} \ln|5x-2| + C$$

$$D. \int \frac{dx}{5x-2} = 5 \ln|5x-2| + C$$

Câu 10. (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \cos 3x$

$$A. \int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C$$

$$B. \int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$$

$$C. \int \cos 3x dx = \sin 3x + C$$

$$D. \int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$$

Câu 11. (Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018) Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^3 + x^2$  là

$$A. \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$B. 3x^2 + 2x + C$$

$$C. x^3 + x^2 + C$$

$$D. x^4 + x^3 + C$$

Câu 12. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x + x$  là

$$A. e^x + 1 + C$$

$$B. e^x + x^2 + C$$

$$C. e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$D. \frac{1}{x+1}e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$$

Câu 13. (Mã đề 101 - BGD - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2x + 5$  là

$$A. x^2 + C.$$

$$B. x^2 + 5x + C.$$

$$C. 2x^2 + 5x + C.$$

$$D. 2x^2 + C.$$

Câu 14. (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 7^x$ .

$$A. \int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$$

$$B. \int 7^x dx = 7^{x+1} + C$$

$$C. \int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$$

$$D. \int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$$

Câu 15. Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \cos 2x$ .

$$A. \int f(x) dx = 2 \sin 2x + C$$

$$B. \int f(x) dx = -2 \sin 2x + C$$

$$C. \int f(x) dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$D. \int f(x) dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + C$$

Câu 16. (Mã đề 102 BGD&ĐT NĂM 2018) Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^4 + x$  là

A.  $4x^3 + 1 + C$

B.  $x^5 + x^2 + C$

C.  $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + C$

D.  $x^4 + x + C$

Câu 17. (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018) Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3x^2 + 1$  là

A.  $x^3 + C$

B.  $\frac{x^3}{3} + x + C$

C.  $6x + C$

D.  $x^3 + x + C$

Câu 18. (THPT AN LÃO HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tìm nguyên hàm  $\int x(x^2 + 7)^{15} dx$  ?

A.  $\frac{1}{2}(x^2 + 7)^{16} + C$

B.  $-\frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C$

C.  $\frac{1}{16}(x^2 + 7)^{16} + C$

D.  $\frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C$

Câu 19. (THPT BA ĐÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 02) Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^{3x}$  là hàm số nào sau đây?

A.  $3e^x + C$ .

B.  $\frac{1}{3}e^{3x} + C$ .

C.  $\frac{1}{3}e^x + C$ .

D.  $3e^{3x} + C$ .

Câu 20. (THPT CẨM GIÀNG 2 NĂM 2018-2019) Tính  $\int (x - \sin 2x) dx$ .

A.  $\frac{x^2}{2} + \sin x + C$ .

B.  $\frac{x^2}{2} + \cos 2x + C$ .

C.  $x^2 + \frac{\cos 2x}{2} + C$ .

D.  $\frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + C$ .

Câu 21. (TRƯỜNG THPT HOÀNG HOA THÁM HÙNG YÊN NĂM 2018-2019) Nguyên hàm của hàm số  $y = e^{2x-1}$  là

A.  $2e^{2x-1} + C$ .

B.  $e^{2x-1} + C$ .

C.  $\frac{1}{2}e^{2x-1} + C$ .

D.  $\frac{1}{2}e^x + C$ .

Câu 22. (THPT HÙNG VƯƠNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tìm họ nguyên hàm của hàm

số  $f(x) = \frac{1}{2x+3}$

A.  $\ln|2x+3| + C$ .

B.  $\frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$ .

C.  $\frac{1}{\ln 2}\ln|2x+3| + C$ .

D.  $\frac{1}{2}\lg(2x+3) + C$ .

Câu 23. (THPT HÙNG VƯƠNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tìm họ nguyên hàm của hàm

số  $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$ .

A.  $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$ .

B.  $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$ .

C.  $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$ .

D.  $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$ .

**Câu 24. (THPT HÙNG VƯƠNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sin 3x$

- A.  $-3\cos 3x + C$ .      B.  $3\cos 3x + C$ .      C.  $\frac{1}{3}\cos 3x + C$ .      D.  $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$ .

**Câu 25. (CHUYÊN KHTN NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3x^2 + \sin x$  là

- A.  $x^3 + \cos x + C$ .      B.  $6x + \cos x + C$ .      C.  $x^3 - \cos x + C$ .      D.  $6x - \cos x + C$ .

**Câu 26. (CHUYÊN BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 03)** Công thức nào sau đây là sai?

- A.  $\int \ln x \, dx = \frac{1}{x} + C$ .      B.  $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$ .  
C.  $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$ .      D.  $\int e^x \, dx = e^x + C$ .

**Câu 27. (CHUYÊN BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 03)** Nếu  $\int f(x) \, dx = 4x^3 + x^2 + C$  thì hàm số  $f(x)$  bằng

- A.  $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3} + Cx$ .      B.  $f(x) = 12x^2 + 2x + C$ .  
C.  $f(x) = 12x^2 + 2x$ .      D.  $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3}$ .

**Câu 28. (THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 1)** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A.  $\int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$ .      B.  $\int x^e \, dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C$ .  
C.  $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$ .      D.  $\int e^x \, dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C$ .

**Câu 29. (THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 1)** Nguyên hàm của hàm số  $y = 2^x$  là

- A.  $\int 2^x \, dx = \ln 2 \cdot 2^x + C$ .      B.  $\int 2^x \, dx = 2^x + C$ .      C.  $\int 2^x \, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ .      D.  $\int 2^x \, dx = \frac{2^x}{x+1} + C$ .

**Câu 30. (HỌC MÃI NĂM 2018-2019-LẦN 02)** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^2$  là

- A.  $F(x) = 2x + C$ .      B.  $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ .      C.  $F(x) = x^3 + C$ .      D.  $F(x) = x + C$ .

**Câu 31. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3x - \sin x$ .

A.  $\int f(x)dx = 3x^2 + \cos x + C.$

B.  $\int f(x)dx = \frac{3x^2}{2} - \cos x + C.$

C.  $\int f(x)dx = \frac{3x^2}{2} + \cos x + C.$

D.  $\int f(x)dx = 3 + \cos x + C.$

**Câu 32. (SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x + \sin x$  là

A.  $x^2 + \cos x + C$

B.  $x^2 - \cos x + C$

C.  $\frac{x^2}{2} - \cos x + C$

D.  $\frac{x^2}{2} + \cos x + C$

**Câu 33. (THPT MINH KHAI HÀ TĨNH NĂM 2018-2019)** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \cos x$  là:

A.  $\cos x + C.$

B.  $-\cos x + C.$

C.  $-\sin x + C.$

D.  $\sin x + C.$

**Câu 34. (THPT ĐOÀN THƯỢNG - HẢI DƯƠNG - 2018 2019)** Họ các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^4 + x^2$  là

A.  $4x^3 + 2x + C.$

B.  $x^4 + x^2 + C.$

C.  $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C.$

D.  $x^5 + x^3 + C.$

**Câu 35. (THPT CÙ HUY CẬN NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x - 2x$  là.

A.  $e^x + x^2 + C.$

B.  $e^x - x^2 + C.$

C.  $\frac{1}{x+1}e^x - x^2 + C.$

D.  $e^x - 2 + C.$

**Câu 36. (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG GIA LAI NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Họ các nguyên hàm của hàm số  $y = \cos x + x$  là

A.  $\sin x + \frac{1}{2}x^2 + C.$

B.  $\sin x + x^2 + C.$

C.  $-\sin x + \frac{1}{2}x^2 + C.$

D.  $-\sin x + x^2 + C.$

**Câu 37. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 02)** Họ nguyên hàm của hàm số  $y = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$  là

A.  $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - \ln|x| + C.$

B.  $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln x + C.$

C.  $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C.$

D.  $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{x^2} + C.$

**Câu 38. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02)** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$  là

A.  $\ln x - \cos x + C.$

B.  $-\frac{1}{x^2} - \cos x + C.$

C.  $\ln|x| + \cos x + C.$

D.  $\ln|x| - \cos x + C.$

Câu 39. (THPT YÊN PHONG 1 BẮC NINH NĂM HỌC 2018-2019 LẦN 2) Hàm số  $F(x) = \frac{1}{3}x^3$  là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây trên  $(-\infty; +\infty)$ ?

- A.  $f(x) = 3x^2$ .      B.  $f(x) = x^3$ .      C.  $f(x) = x^2$ .      D.  $f(x) = \frac{1}{4}x^4$ .

Câu 40. (THPT YÊN PHONG 1 BẮC NINH NĂM HỌC 2018-2019 LẦN 2) Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2^x$ .

- A.  $\int f(x) dx = 2^x + C$ .      B.  $\int f(x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ .  
C.  $\int f(x) dx = 2^x \ln 2 + C$ .      D.  $\int f(x) dx = \frac{2^{x+1}}{x+1} + C$ .

Câu 41. (THPT - YÊN ĐỊNH THANH HÓA 2018 2019- LẦN 2) Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2}$ .

- A.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$ .      B.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$ .  
C.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$ .      D.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$ .

Câu 42. (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Hàm số nào trong các hàm số sau đây là một nguyên hàm của hàm số  $y = e^x$ ?

- A.  $y = \frac{1}{x}$ .      B.  $y = e^x$ .      C.  $y = e^{-x}$ .      D.  $y = \ln x$ .

Câu 43. (CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH ĐỒNG NAI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tính  $F(x) = \int e^2 dx$ , trong đó  $e$  là hằng số và  $e \approx 2,718$ .

- A.  $F(x) = \frac{e^2 x^2}{2} + C$ .      B.  $F(x) = \frac{e^3}{3} + C$ .      C.  $F(x) = e^2 x + C$ .      D.  $F(x) = 2ex + C$ .

Câu 44. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG TRỊ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{1-2x}$  trên  $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ .

- A.  $\frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$ .      B.  $\frac{1}{2} \ln(1-2x) + C$ .      C.  $-\frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$ .      D.  $\ln|2x-1| + C$ .

Câu 45. (ĐỀ 04 VTED NĂM 2018-2019) Nguyên hàm của hàm số  $x^3 + x^2$ ?

A.  $3x^2 + 2x + C$ .

B.  $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$ .

C.  $x^4 + x^3 + C$ .

D.  $4x^4 + 3x^3 + C$ .

Câu 46. (CHUYÊN HÙNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 03) Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2^x + x$  là

A.  $\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^2}{2} + C$ .

B.  $2^x + x^2 + C$ .

C.  $\frac{2^x}{\ln 2} + x^2 + C$ .

D.  $2^x + \frac{x^2}{2} + C$ .

Câu 47. (THPT CHUYÊN SƠN LA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 1 + \sin x$

A.  $1 + \cos x + C$ .

B.  $1 - \cos x + C$ .

C.  $x + \cos x + C$ .

D.  $x - \cos x + C$ .

Câu 48. (THPT ĐÔNG SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 02) Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2019$  là

A.  $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + C$ .

B.  $\frac{1}{9}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2019x + C$ .

C.  $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2019x + C$ .

D.  $\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 2019x + C$ .

Câu 49. (THPT LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2018-2019) Họ nguyên hàm của hàm số  $t(x) = 2^x - x^2$  là

A.  $\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{x^3}{3} + C$ .

B.  $2^x - 2x + C$ .

C.  $2^x \ln 2 - \frac{x^3}{3} + C$ .

D.  $\frac{2^x}{\ln 2} - 2x + C$ .

Câu 50. (THPT YÊN KHÁNH - NINH BÌNH - 2018 - 2019) Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{3x-1}$  trên khoảng  $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$  là:

A.  $\frac{1}{3} \ln(3x-1) + C$

B.  $\ln(1-3x) + C$

C.  $\frac{1}{3} \ln(1-3x) + C$

D.  $\ln(3x-1) + C$

Câu 51. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A.  $\int 2^x dx = 2^x \ln 2 + C$ .

B.  $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$ .

C.  $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$ .

D.  $\int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| + C \quad (\forall x \neq -1)$ .

Câu 52. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số  $f(x) = \frac{2x^4 + 3}{x^2}$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?



$$A. \int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{2x} + C.$$

$$B. \int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C.$$

$$C. \int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{x} + C.$$

$$D. \int f(x)dx = 2x^3 - \frac{3}{x} + C.$$

**Câu 53. (SỞ GD&ĐT THANH HÓA NĂM 2018 - 2019)** Cho hàm số  $f(x) = 2^x + x + 1$ . Tìm  $\int f(x)dx$ .

$$A. \int f(x)dx = 2^x + x^2 + x + C.$$

$$B. \int f(x)dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C.$$

$$C. \int f(x)dx = 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C.$$

$$D. \int f(x)dx = \frac{1}{x+1} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C.$$

**Câu 54. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3x - \sin x$ .

$$A. \int f(x)dx = 3x^2 + \cos x + C.$$

$$B. \int f(x)dx = \frac{3x^2}{2} - \cos x + C.$$

$$C. \int f(x)dx = \frac{3x^2}{2} + \cos x + C.$$

$$D. \int f(x)dx = 3 + \cos x + C.$$

**Câu 55. (CHUYÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 02)** Hàm số  $F(x) = e^{x^2}$  là nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau:

$$A. f(x) = 2xe^{x^2}. \quad B. f(x) = x^2 e^{x^2} - 1. \quad C. f(x) = e^{2x}. \quad D. f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}.$$

**Câu 56. (THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3^{-x}$  là

$$A. -\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$$

$$B. -3^{-x} + C$$

$$C. 3^{-x} \ln 3 + C$$

$$D. \frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$$

**Câu 57. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^3 + x^2$  là

$$A. \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C.$$

$$B. x^4 + x^3 + C.$$

$$C. 3x^2 + 2x + C.$$

$$D. \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{4} + C$$

**Câu 58. (CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Hàm số nào trong các hàm số sau đây không là nguyên hàm của hàm số  $y = x^{2019}$ ?

$$A. \frac{x^{2020}}{2020} + 1.$$

$$B. \frac{x^{2020}}{2020}.$$

$$C. y = 2019x^{2018}.$$

$$D. \frac{x^{2020}}{2020} - 1.$$

Câu 59. (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2018-2019 LẦN 1) Tìm họ nguyên hàm của hàm số

$$y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}.$$

A.  $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C, C \in R$

B.  $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in R$

C.  $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in R$

D.  $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in R$

Câu 60. (SỞ GD&ĐT QUẢNG NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tìm nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = e^x \left( 2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right).$$

A.  $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C.$

B.  $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C.$

C.  $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C.$

D.  $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C.$

Câu 61. (HSG BẮC NINH NĂM 2018-2019) Họ nguyên hàm của hàm số  $y = e^x \left( 2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$  là

A.  $2e^x + \tan x + C$

B.  $2e^x - \tan x + C$

C.  $2e^x - \frac{1}{\cos x} + C$

D.  $2e^x + \frac{1}{\cos x} + C$

Câu 62. (ĐỀ 15 LOVE BOOK NĂM 2018-2019) Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x-1}}$  có dạng:

A.  $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$

B.  $\int f(x) dx = \sqrt{2x+1} + C.$

C.  $\int f(x) dx = 2\sqrt{2x+1} + C.$

D.  $\int f(x) dx = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} + C.$

Câu 63. (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tìm nguyên  $F(x)$  của hàm số

$$f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)?$$

A.  $F(x) = \frac{x^4}{4} - 6x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + C.$

B.  $F(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + C.$

C.  $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C.$

D.  $F(x) = x^3 + 6x^2 + 11x^2 + 6x + C.$

Câu 64. (Mã đề 104 - BGD - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2}$  trên khoảng

$(2; +\infty)$  là

A.  $3 \ln(x-2) + \frac{2}{x-2} + C$

B.  $3 \ln(x-2) - \frac{2}{x-2} + C$

C.  $3 \ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C$

D.  $3 \ln(x-2) + \frac{4}{x-2} + C$

**Câu 65. (Mã đề 101 - BGD - 2019)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$  trên khoảng  $(-1; +\infty)$  là

A.  $2 \ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C$

B.  $2 \ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C$

C.  $2 \ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + C$

D.  $2 \ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + C$

**Câu 66. (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017)** Cho  $F(x) = x^2$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \cdot e^{2x}$ . Tìm nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \cdot e^{2x}$ .

A.  $\int f'(x) \cdot e^{2x} dx = -x^2 + x + C$

B.  $\int f'(x) \cdot e^{2x} dx = -x^2 + 2x + C$

C.  $\int f'(x) \cdot e^{2x} dx = 2x^2 - 2x + C$

D.  $\int f'(x) \cdot e^{2x} dx = -2x^2 + 2x + C$

**Dạng 1.2 Tìm nguyên hàm cơ bản có điều kiện**

**Câu 67. (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017)** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \sin x + \cos x$  thỏa mãn  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ .

A.  $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$

B.  $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$

C.  $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$

D.  $F(x) = \cos x - \sin x + 3$

**Câu 68. (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017)** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x + 2x$  thỏa mãn  $F(0) = \frac{3}{2}$ . Tìm  $F(x)$ .

A.  $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$

B.  $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$

C.  $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$

D.  $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$

**Câu 69. (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017)** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = 3 - 5 \sin x$  và  $f(0) = 10$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A.  $f(x) = 3x - 5 \cos x + 15$

B.  $f(x) = 3x - 5 \cos x + 2$

C.  $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$

D.  $f(x) = 3x + 5 \cos x + 2$

**Câu 70. (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$  thỏa mãn

$$f'(x) = \frac{2}{2x-1}, f(0) = 1, f(1) = 2. \text{ Giá trị của biểu thức } f(-1) + f(3) \text{ bằng}$$

A.  $2 + \ln 15$

B.  $3 + \ln 15$

C.  $\ln 15$

D.  $4 + \ln 15$

**Câu 71. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  trên khoảng  $(1; +\infty)$  thỏa mãn  $F(e+1) = 4$  Tìm  $F(x)$ .

A.  $2 \ln(x-1) + 2$

B.  $\ln(x-1) + 3$

C.  $4 \ln(x-1)$

D.  $\ln(x-1) - 3$

**Câu 72. (ĐỀ GK2 VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019)** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = 2 - 5 \sin x$  và  $f(0) = 10$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A.  $f(x) = 2x + 5 \cos x + 3$ .

B.  $f(x) = 2x - 5 \cos x + 15$ .

C.  $f(x) = 2x + 5 \cos x + 5$ .

D.  $f(x) = 2x - 5 \cos x + 10$ .

**Câu 73. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^{2x}$  và  $F(0) = 0$ . Giá trị của  $F(\ln 3)$  bằng

A. 2.

B. 6.

C. 8.

D. 4.

**Câu 74. (THPT ĐÔNG SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 02)** Hàm số  $F(x) = x^2 \ln(\sin x - \cos x)$  là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A.  $f(x) = \frac{x^2}{\sin x - \cos x}$ .

B.  $f(x) = 2x \ln(\sin x - \cos x) + \frac{x^2(\cos x + \sin x)}{\sin x - \cos x}$ .

C.  $f(x) = \frac{x^2(\sin x + \cos x)}{\sin x - \cos x}$ .

D.  $f(x) = 2x \ln(\sin x - \cos x) + \frac{x^2}{\sin x - \cos x}$ .

**Câu 75. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019)** Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm  $f(x) = \cos 3x$  và  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$ . Tính  $F\left(\frac{\pi}{9}\right)$ .

A.  $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}+2}{6}$

B.  $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}-2}{6}$

C.  $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}+6}{6}$

D.  $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}-6}{6}$

**Câu 76. (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ NĂM 2018 - 2019 LẦN 01)** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2^x(2^{-x} + 5)$  là

A.  $x + 5\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right) + C$ .      B.  $x + 5 \cdot 2^x \ln 2 + C$ .

C.  $\frac{2^x}{\ln 2}\left(-\frac{2^x}{\ln 2}x + 5x\right) + C$ .      D.  $1 + 5\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right) + C$ .

**Câu 77. (SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $e^{2x}$  và  $F(0) = \frac{201}{2}$ . Giá trị  $F\left(\frac{1}{2}\right)$  là

A.  $\frac{1}{2}e + 200$

B.  $2e + 100$

C.  $\frac{1}{2}e + 50$

D.  $\frac{1}{2}e + 100$

**Câu 78. (SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Hàm số  $F(x)$  nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) \cdot g(x)$ , biết  $F(1) = 3$ ,

$\int f(x) dx = x + C_1$  và  $\int g(x) dx = x^2 + C_2$ .

A.  $F(x) = x^2 + 1$

B.  $F(x) = x^2 + 3$

C.  $F(x) = x^2 + 2$

D.  $F(x) = x^2 + 4$

**Câu 79. (THPT MINH KHAI HÀ TĨNH NĂM 2018-2019)** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x-2}$ , biết  $F(1) = 2$ . Giá trị của  $F(0)$  bằng

A.  $2 + \ln 2$ .

B.  $\ln 2$ .

C.  $2 + \ln(-2)$ .

D.  $\ln(-2)$ .

**Câu 80. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 02)** Tìm một nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = ax + \frac{b}{x^2}$  ( $x \neq 0$ ), biết rằng  $F(-1) = 1, F(1) = 4, f(1) = 0$

A.  $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4x} - \frac{7}{4}$ .

B.  $F(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{7}{4}$ .

C.  $F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}$ .

D.  $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}$ .

**Câu 81. (KTNL GV THUẬN THÀNH 2 BẮC NINH NĂM 2018-2019)** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm  $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ ; biết  $F(0) = 2$ . Tính  $F(1)$ .

A.  $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 - 2$ .    B.  $F(1) = \ln 3 + 2$ .    C.  $F(1) = 2 \ln 3 - 2$ .    D.  $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2$ .

Câu 82. (THPT YÊN PHONG SỐ 1 BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = -\cos x$  và  $f(0) = 2019$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A.  $f(x) = -\sin x + 2019$ .    B.  $f(x) = 2019 + \cos x$ .

C.  $f(x) = \sin x + 2019$ .    D.  $f(x) = 2019 - \cos x$ .

Câu 83. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm  $f(x) = \cos 3x$  và  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$ . Tính  $F\left(\frac{\pi}{9}\right)$ .

A.  $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}+2}{6}$     B.  $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}-2}{6}$     C.  $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}+6}{6}$     D.  $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}-6}{6}$

Câu 84. (CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Hàm số  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $y = \frac{1}{x}$  trên  $(-\infty; 0)$  thỏa mãn  $F(-2) = 0$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $F(x) = \ln\left(\frac{-x}{2}\right) \forall x \in (-\infty; 0)$

B.  $F(x) = \ln|x| + C \forall x \in (-\infty; 0)$  với  $C$  là một số thực bất kì.

C.  $F(x) = \ln|x| + \ln 2 \forall x \in (-\infty; 0)$ .

D.  $F(x) = \ln(-x) + C \forall x \in (-\infty; 0)$  với  $C$  là một số thực bất kì.

Câu 85. (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và:  $f'(x) = 2e^{2x} + 1, \forall x, f(0) = 2$ . Hàm  $f(x)$  là

A.  $y = 2e^x + 2x$ .    B.  $y = 2e^x + 2$ .    C.  $y = e^{2x} + x + 2$ .    D.  $y = e^{2x} + x + 1$ .

Câu 86. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số  $f(x) = 2x + e^x$ . Tìm một nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $F(0) = 2019$ .

A.  $F(x) = x^2 + e^x + 2018$ .

B.  $F(x) = x^2 + e^x - 2018$ .

C.  $F(x) = x^2 + e^x + 2017$ .

D.  $F(x) = e^x - 2019$ .

**Câu 87. (THPT MINH KHAI HÀ TĨNH NĂM 2018-2019)** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  thỏa mãn  $f'(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $f(0) = 2017$ ,  $f(2) = 2018$ . Tính  $S = f(3) - f(-1)$ .

- A.  $S = \ln 4035$ .      B.  $S = 4$ .      C.  $S = \ln 2$ .      D.  $S = 1$ .

**Câu 88. (THPT NĂM 2018-2019 LẦN 04)** Cho biết  $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = a \ln|x+1| + b \ln|x-2| + C$ .

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $a + 2b = 8$ .      B.  $a + b = 8$ .      C.  $2a - b = 8$ .      D.  $a - b = 8$ .

**Câu 89. (THPT NĂM 2018-2019 LẦN 04)** Cho biết  $\int \frac{1}{x^3 - x} dx = a \ln|(x-1)(x+1)| + b \ln|x| + C$ . Tính giá trị biểu thức:  $P = 2a + b$ .

- A. 0.      B. -1.      C.  $\frac{1}{2}$ .      D. 1.

**Câu 90. (THPT NĂM 2018-2019 LẦN 04)** Cho biết  $\int \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx = a \ln|x+2| + b \ln|x+3| + C$ . Tính giá trị biểu thức:  $P = a^2 + ab + b^2$ .

- A. 12.      B. 13.      C. 14.      D. 15.

**Câu 91.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = ax^2 + \frac{b}{x^3}$ ,  $f'(1) = 3$ ,  $f(1) = 2$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}$ . Khi đó  $2a + b$  bằng

- A.  $-\frac{3}{2}$ .      B. 0.      C. 5.      D.  $\frac{3}{2}$ .

**Câu 92. (THPT NĂM 2018-2019 LẦN 04)** Gọi  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2^x$ , thỏa mãn  $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$ . Tính giá trị biểu thức  $T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$ .

- A.  $T = 1009 \cdot \frac{2^{2019} + 1}{\ln 2}$ .      B.  $T = 2^{2019 \cdot 2020}$ .  
C.  $T = \frac{2^{2019} - 1}{\ln 2}$ .      D.  $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$ .

**Câu 93. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG TRỊ NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ . Biết  $F\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = k$  với mọi  $k \in \mathbb{Z}$ . Tính  $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi)$ .

- A. 55.      B. 44.      C. 45.      D. 0.

## Dạng 2. Sử dụng phương pháp VI PHẦN để tìm nguyên hàm

### Dạng 2.1 Tìm nguyên hàm không có điều kiện

**Câu 94. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3\sin^2 x \cos x$  là

- A.  $\sin^3 x + C$ .      B.  $-\sin^3 x + C$ .      C.  $\cos^3 x + C$ .      D.  $-\cos^3 x + C$ .

**Câu 95. (CHUYÊN BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 03)** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x}$ .

- A.  $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C$ .      B.  $\int f(x) dx = \ln|1 + 3 \cos x| + C$ .  
C.  $\int f(x) dx = 3 \ln|1 + 3 \cos x| + C$ .      D.  $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C$ .

**Câu 96. (CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH PHÚ YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho  $\int f(x) dx = 4x^3 + 2x + C_0$ . Tính  $I = \int xf(x^2) dx$ .

- A.  $I = 2x^6 + x^2 + C$ .      B.  $I = \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^6}{6} + C$ .  
C.  $I = 4x^6 + 2x^2 + C$ .      D.  $I = 12x^2 + 2$ .

**Câu 97. (SỞ GD&ĐT THANH HÓA NĂM 2018 - 2019)** Tìm các hàm số  $f(x)$  biết  $f'(x) = \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2}$ .

- A.  $f(x) = \frac{\sin x}{(2 + \sin x)^2} + C$ .      B.  $f(x) = \frac{1}{(2 + \cos x)} + C$ .  
C.  $f(x) = -\frac{1}{2 + \sin x} + C$ .      D.  $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \sin x} + C$ .

**Câu 98. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3+1}$ .

- A.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} \cdot e^{x^3+1} + C$ .      B.  $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C$ .  
C.  $\int f(x) dx = e^{x^3+1} + C$ .      D.  $\int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C$ .



Câu 99. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{5x+4}$  là:

- A.  $\frac{1}{5} \ln(5x+4) + C$ .    B.  $\ln|5x+4| + C$ .    C.  $\frac{1}{\ln 5} \ln|5x+4| + C$ .    D.  $\frac{1}{5} \ln|5x+4| + C$ .

Câu 100. (ĐỀ 04 VTED NĂM 2018-2019) Tìm tất cả các họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x^9 + 3x^5}$

- A.  $\int f(x) dx = -\frac{1}{3x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$     B.  $\int f(x) dx = -\frac{1}{12x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$   
 C.  $\int f(x) dx = -\frac{1}{3x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$     D.  $\int f(x) dx = -\frac{1}{12x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$

Câu 101. (Mã 102 - BGD - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{3x-1}{(x-1)^2}$  trên khoảng  $(1; +\infty)$  là

- A.  $3 \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + c$ .    B.  $3 \ln(x-1) + \frac{2}{x-1} + c$ .  
 C.  $3 \ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + c$ .    D.  $3 \ln(x-1) + \frac{1}{x-1} + c$ .

Câu 102. (THPT HÀ HUY TẬP - LẦN 2 - 2018) Nguyên hàm của  $f(x) = \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x}$  là

- A.  $\sin^2 x \cdot e^{\sin^2 x - 1} + C$ .    B.  $\frac{e^{\sin^2 x + 1}}{\sin^2 x + 1} + C$ .    C.  $e^{\sin^2 x} + C$ .    D.  $\frac{e^{\sin^2 x - 1}}{\sin^2 x - 1} + C$ .

### Dạng 2.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện

Câu 103. (THPT QUANG TRUNG ĐÔNG ĐA HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{\sin x}{1+3\cos x}$  và  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ . Tính  $F(0)$ .

- A.  $F(0) = -\frac{1}{3} \ln 2 + 2$ .    B.  $F(0) = -\frac{2}{3} \ln 2 + 2$ .    C.  $F(0) = -\frac{2}{3} \ln 2 - 2$ .    D.  $F(0) = -\frac{1}{3} \ln 2 - 2$ .

Câu 104. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tìm hàm số  $F(x)$  biết  $F(x) = \int \frac{x^3}{x^4+1} dx$  và  $F(0) = 1$ .

- A.  $F(x) = \ln(x^4+1) + 1$ .    B.  $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4+1) + \frac{3}{4}$ .

C.  $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + 1.$

D.  $F(x) = 4 \ln(x^4 + 1) + 1.$

**Câu 105.** Cho  $F(x)$  là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$  và  $F(0) = -\ln 2e$ . Tập nghiệm  $S$  của phương trình  $F(x) + \ln(e^x + 1) = 2$  là:

A.  $S = \{3\}$

B.  $S = \{2; 3\}$

C.  $S = \{-2; 3\}$

D.  $S = \{-3; 3\}$

**Câu 106.** (HỌC MÃI NĂM 2018-2019-LẦN 02) Biết  $\int \frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^b + C, x \neq -1$  với  $a, b \in \mathbb{N}^*$

. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $a = 2b.$

B.  $b = 2a.$

C.  $a = 2018b.$

D.  $b = 2018a.$

**Câu 107.** (THPT ĐOÀN THƯỢNG - HẢI DƯƠNG - 2018 2019) Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) \cdot f(x) = x^4 + x^2$ . Biết  $f(0) = 2$ . Tính  $f^2(2)$ .

A.  $f^2(2) = \frac{313}{15}.$

B.  $f^2(2) = \frac{332}{15}.$

C.  $f^2(2) = \frac{324}{15}.$

D.  $f^2(2) = \frac{323}{15}.$

**Câu 108.** (THPT CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ - 2018) Biết rằng  $F(x)$  là một nguyên hàm trên  $\mathbb{R}$  của hàm số  $f(x) = \frac{2017x}{(x^2 + 1)^{2018}}$  thỏa mãn  $F(1) = 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  của  $F(x)$ .

A.  $m = -\frac{1}{2}.$

B.  $m = \frac{1 - 2^{2017}}{2^{2018}}.$

C.  $m = \frac{1 + 2^{2017}}{2^{2018}}.$

D.  $m = \frac{1}{2}.$

### Dạng 3. Sử dụng phương pháp ĐỔI BIẾN để tìm nguyên hàm

#### Dạng 3.1 Tìm nguyên hàm không có điều kiện

**Câu 109.** (CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH PHÚ YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt[3]{3x+1}$  là

A.  $\int f(x) dx = (3x+1) \sqrt[3]{3x+1} + C.$

B.  $\int f(x) dx = \sqrt[3]{3x+1} + C.$

C.  $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \sqrt[3]{3x+1} + C.$

D.  $\int f(x) dx = \frac{1}{4} (3x+1) \sqrt[3]{3x+1} + C.$

**Câu 110.** Họ các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (2x+3)^5$  là

A.  $F(x) = \frac{(2x+3)^6}{12} + C.$

B.  $F(x) = \frac{(2x+3)^6}{6} + C.$

C.  $F(x) = 10(2x+3)^4 + C.$

D.  $F(x) = 5(2x+3)^4 + C.$

**Câu 111.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt{3x+2}$  là

A.  $\frac{2}{3}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C$  B.  $\frac{1}{3}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C$

C.  $\frac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C$  D.  $\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3x+2}} + C$

**Câu 112. (ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019)** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt{2x+1}$  là

A.  $-\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

B.  $\frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$

C.  $\frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

D.  $\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

**Câu 113. (THPT YÊN PHONG 1 BẮC NINH NĂM HỌC 2018-2019 LẦN 2)** Đổi biến  $t = x-1$  thì  $\int \frac{x}{(x-1)^4} dx$  trở thành

A.  $\int \frac{t-1}{t^4} dt.$

B.  $\int \frac{(t+1)^4}{t} dt.$

C.  $\int \frac{t+1}{t^4} dt.$

D.  $\int \frac{t+1}{t} dt.$

**Câu 114. (THPT YÊN PHONG SỐ 1 BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Khi tính nguyên hàm  $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$ , bằng cách đặt  $u = \sqrt{x+1}$  ta được nguyên hàm nào?

A.  $\int 2(u^2 - 4) du.$

B.  $\int (u^2 - 4) du.$

C.  $\int (u^2 - 3) du.$

D.  $\int 2u(u^2 - 4) du.$

**Câu 115. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019)** Biết  $\int f(x) dx = 3x \cos(2x-5) + C$ . Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A.  $\int f(3x) dx = 3x \cos(6x-5) + C$

B.  $\int f(3x) dx = 9x \cos(6x-5) + C$

C.  $\int f(3x) dx = 9x \cos(2x-5) + C$

D.  $\int f(3x) dx = 3x \cos(2x-5) + C$

**Câu 116. (THPT LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2018-2019)** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^3(x^2+1)^{2019}$  là

A.  $\frac{1}{2} \left[ \frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020} \right].$

B.  $\frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020}.$

C.  $\frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020} + C.$

D.  $\frac{1}{2} \left[ \frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020} \right] + C.$

$\int f(x)dx = 3x \cos(2x-5) + C$ . Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A.  $\int f(3x)dx = 3x \cos(6x-5) + C$       B.  $\int f(3x)dx = 9x \cos(6x-5) + C$   
 C.  $\int f(3x)dx = 9x \cos(2x-5) + C$       D.  $\int f(3x)dx = 3x \cos(2x-5) + C$

Câu 118. (Mã 103 - BGD - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{2x+1}{(x+2)^2}$  trên khoảng  $(-2; +\infty)$  là

- A.  $2 \ln(x+2) + \frac{3}{x+2} + C$ .      B.  $2 \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} + C$ .  
 C.  $2 \ln(x+2) - \frac{1}{x+2} + C$ .      D.  $2 \ln(x+2) - \frac{3}{x+2} + C$ .

Câu 119. (THPT HÀ HUY TẬP - LẦN 2 - 2018) Nguyên hàm của  $f(x) = \frac{1+\ln x}{x \cdot \ln x}$  là:

- A.  $\int \frac{1+\ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln|\ln x| + C$ .      B.  $\int \frac{1+\ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln|x^2 \cdot \ln x| + C$ .  
 C.  $\int \frac{1+\ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln|x + \ln x| + C$ .      D.  $\int \frac{1+\ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln|x \cdot \ln x| + C$ .

Câu 120. (THPT CHUYÊN HẠ LONG - LẦN 1 - 2018) Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^2 e^{x^3+1}$

- A.  $\int f(x)dx = e^{x^3+1} + C$ .      B.  $\int f(x)dx = 3e^{x^3+1} + C$ .  
 C.  $\int f(x)dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C$ .      D.  $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3}e^{x^3+1} + C$ .

Câu 121. (THPT CHUYÊN HẠ LONG - LẦN 1 - 2018) Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$

- A.  $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C$ .      B.  $\int f(x)dx = \sqrt{2x+1} + C$ .  
 C.  $\int f(x)dx = 2\sqrt{2x+1} + C$ .      D.  $\int f(x)dx = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} + C$ .

Câu 122. (THPT CHUYÊN HẠ LONG - LẦN 1 - 2018) Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \tan^5 x$ .

- A.  $\int f(x)dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\cos x| + C$ .  
 B.  $\int f(x)dx = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\cos x| + C$ .  
 C.  $\int f(x)dx = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\cos x| + C$ .

D.  $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + C.$

Câu 123. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN - 2018) Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  là

A.  $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \sqrt{x^2 + 1} + C.$       B.  $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + C.$

C.  $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C.$       D.  $F(x) = x^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C.$

Câu 124. (THPT NGÔ QUYỀN - HẢI PHÒNG - 2018) Biết  $\int f(2x) dx = \sin^2 x + \ln x$ . Tìm nguyên hàm  $\int f(x) dx$ .

A.  $\int f(x) dx = \sin^2 \frac{x}{2} + \ln x + C.$       B.  $\int f(x) dx = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \ln x + C.$

C.  $\int f(x) dx = 2 \sin^2 x + 2 \ln x - \ln 2 + C.$       D.  $\int f(x) dx = 2 \sin^2 2x + 2 \ln x - \ln 2 + C.$

**Dạng 3.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện**

Câu 125. (HỒNG BÀNG - HẢI PHÒNG - LẦN 1 - 2018) Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$  và  $F(0) = \pi$ . Tính  $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

A.  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi.$       B.  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$       C.  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \pi.$       D.  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi.$

Câu 126. (THPT YÊN KHÁNH - NINH BÌNH - 2018 - 2019) Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{2x+1}{x^4 + 2x^3 + x^2}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$  thỏa mãn  $F(1) = \frac{1}{2}$ . Giá trị của biểu thức  $S = F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2019)$  bằng

A.  $\frac{2019}{2020}.$       B.  $\frac{2019 \cdot 2021}{2020}.$       C.  $2018 \frac{1}{2020}.$       D.  $-\frac{2019}{2020}.$

Câu 127. (SỞ GD&ĐT QUẢNG NAM - 2018) Biết  $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$  với  $a, b$  là các số hữu tỉ. Tính tích  $ab$ ?

A.  $ab = \frac{1}{8}.$       B.  $ab = \frac{1}{4}.$       C.  $ab = -\frac{1}{8}.$       D.  $ab = -\frac{1}{4}.$

Câu 128. (THPT CHUYÊN HẠ LONG - LẦN 2 - 2018) Biết rằng trên khoảng  $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ , hàm số

$f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$  có một nguyên hàm  $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$  ( $a, b, c$  là các số nguyên). Tổng

$S = a + b + c$  bằng

A. 4.      B. 3.      C. 5.      D. 6.

Câu 129. Giả sử  $\int \frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{g(x)} + C$  ( $C$  là hằng số).

Tính tổng các nghiệm của phương trình  $g(x) = 0$ .

- A.  $-1$ .                              B.  $1$ .                              C.  $3$ .                              D.  $-3$ .

Câu 130. (THPT NAM TRỰC - NAM ĐỊNH - 2018) Cho  $I = \int \frac{1}{x^3(1+x^2)} dx$

$= \frac{-a}{x^2} - b \ln|x| + 2c \ln(1+x^2) + C$ . Khi đó  $S = a + b + c$  bằng

- A.  $\frac{-1}{4}$ .                              B.  $\frac{3}{4}$ .                              C.  $\frac{7}{4}$ .                              D.  $2$ .

#### Dạng 4. Nguyên hàm từng phần

##### Dạng 4.1 Tìm nguyên hàm không có điều kiện

Câu 131. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 4x(1 + \ln x)$  là:

- A.  $2x^2 \ln x + 3x^2$ .              B.  $2x^2 \ln x + x^2$ .  
C.  $2x^2 \ln x + 3x^2 + C$ .      D.  $2x^2 \ln x + x^2 + C$ .

Câu 132. Họ các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x \sin x$  là

- A.  $F(x) = x \cos x + \sin x + C$ .                              B.  $F(x) = x \cos x - \sin x + C$ .  
C.  $F(x) = -x \cos x - \sin x + C$ .                              D.  $F(x) = -x \cos x + \sin x + C$ .

Câu 133. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NĂM 2018-2019) Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x.e^{2x}$  là :

- A.  $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \left( x - \frac{1}{2} \right) + C$                               B.  $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} (x - 2) + C$   
C.  $F(x) = 2e^{2x} (x - 2) + C$                               D.  $F(x) = 2e^{2x} \left( x - \frac{1}{2} \right) + C$

Câu 134. (THPT GIA LỘC HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (2x-1)e^x$  là

- A.  $(2x-3)e^x + C$ .              B.  $(2x+3)e^x + C$ .  
C.  $(2x+1)e^x + C$ .              D.  $(2x-1)e^x + C$ .

**Câu 135. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = xe^{2x}$ ?

A.  $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \left( x - \frac{1}{2} \right) + C.$

B.  $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} (x - 2) + C.$

C.  $F(x) = 2e^{2x} (x - 2) + C.$

D.  $F(x) = 2e^{2x} \left( x - \frac{1}{2} \right) + C.$

**Câu 136. (THPT CHUYÊN SƠN LA NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x(1 + \sin x)$  là

A.  $\frac{x^2}{2} - x \sin x + \cos x + C.$

B.  $\frac{x^2}{2} - x \cos x + \sin x + C.$

C.  $\frac{x^2}{2} - x \cos x - \sin x + C.$

D.  $\frac{x^2}{2} - x \sin x - \cos x + C.$

**Câu 137. (ĐỀ 01 ĐỀ PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019)** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2x(1 + e^x)$  là

A.  $(2x - 1)e^x + x^2.$

B.  $(2x + 1)e^x + x^2.$

C.  $(2x + 2)e^x + x^2.$

D.  $(2x - 2)e^x + x^2.$

**Câu 138.** Họ nguyên hàm của  $f(x) = x \ln x$  là kết quả nào sau đây?

A.  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{2}x^2 + C.$

B.  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x^2 + C.$

C.  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$

D.  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x + C.$

**Câu 139. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (3x^2 + 1) \cdot \ln x.$

A.  $\int f(x) dx = x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} + C.$

B.  $\int f(x) dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} + C.$

C.  $\int f(x) dx = x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C.$

D.  $\int f(x) dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C.$

**Câu 140. (THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$  trên khoảng  $(0; \pi)$  là

A.  $-x \cot x + \ln(\sin x) + C.$

B.  $x \cot x - \ln|\sin x| + C.$

C.  $x \cot x + \ln|\sin x| + C.$

D.  $-x \cot x - \ln(\sin x) + C.$

**Câu 141. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Họ nguyên hàm của hàm số  $y = 3x(x + \cos x)$  là

A.  $x^3 + 3(x \sin x + \cos x) + C$

B.  $x^3 - 3(x \sin x + \cos x) + C$

C.  $x^3 + 3(x \sin x - \cos x) + C$

D.  $x^3 - 3(x \sin x - \cos x) + C$

**Câu 142. (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH LẦN 1 NĂM 2018-2019)** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^4 + xe^x$  là

A.  $\frac{1}{5}x^5 + (x+1)e^x + C$ . B.  $\frac{1}{5}x^5 + (x-1)e^x + C$ .

C.  $\frac{1}{5}x^5 + xe^x + C$ . D.  $4x^3 + (x+1)e^x + C$ .

**Câu 143.** Cho hai hàm số  $F(x), G(x)$  xác định và có đạo hàm lần lượt là  $f(x), g(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Biết rằng  $F(x).G(x) = x^2 \ln(x^2 + 1)$  và  $F(x).g(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$ . Họ nguyên hàm của  $f(x).G(x)$  là

A.  $(x^2 + 1)\ln(x^2 + 1) + 2x^2 + C$ .

B.  $(x^2 + 1)\ln(x^2 + 1) - 2x^2 + C$ .

C.  $(x^2 + 1)\ln(x^2 + 1) - x^2 + C$ .

D.  $(x^2 + 1)\ln(x^2 + 1) + x^2 + C$ .

**Câu 144. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A.  $\int xe^x dx = e^x + xe^x + C$ .

B.  $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x + e^x + C$ .

C.  $\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$ .

D.  $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x + C$ .

**Câu 145. (SỞ GD&ĐT BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho hai hàm số  $F(x), G(x)$  xác định và có đạo hàm lần lượt là  $f(x), g(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $F(x).G(x) = x^2 \ln(x^2 + 1)$  và  $F(x).g(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$ . Tìm họ nguyên hàm của  $f(x).G(x)$ .

A.  $(x^2 + 1)\ln(x^2 + 1) + 2x^2 + C$ .

B.  $(x^2 + 1)\ln(x^2 + 1) - 2x^2 + C$ .

C.  $(x^2 + 1)\ln(x^2 + 1) - x^2 + C$ .

D.  $(x^2 + 1)\ln(x^2 + 1) + x^2 + C$ .



Câu 146. (ĐỀ THI THỬ VTED 03 NĂM HỌC 2018 - 2019) Cho biết  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}$  là một nguyên

hàm của  $f(x) = \frac{(x^2 + a)^2}{x^2}$ . Tìm nguyên hàm của  $g(x) = x \cos ax$ .

A.  $x \sin x - \cos x + C$       B.  $\frac{1}{2}x \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$

C.  $x \sin x + \cos x + C$       D.  $\frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$

Câu 147. (TT THANH TƯỜNG NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Họ nguyên hàm của hàm số

$$y = \frac{(2x^2 + x) \ln x + 1}{x} \text{ là}$$

A.  $(x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C$ .

B.  $(x^2 + x - 1) \ln x + \frac{x^2}{2} - x + C$ .

C.  $(x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C$ .

D.  $(x^2 + x - 1) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C$ .

Dạng 4.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện

Câu 148. (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho  $F(x) = \frac{1}{2x^2}$  là một nguyên hàm của hàm số  $\frac{f(x)}{x}$ . Tìm nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \ln x$ .

A.  $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C$

B.  $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$

C.  $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$

D.  $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C$

Câu 149. (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho  $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$  là một nguyên hàm của hàm số  $\frac{f(x)}{x}$ . Tìm nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \ln x$

A.  $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C$

B.  $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C$

C.  $\int f'(x) \ln x dx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$

D.  $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$

**Câu 150. (MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017)** Cho  $F(x) = (x-1)e^x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^{2x}$ . Tìm nguyên hàm của hàm số  $f'(x)e^{2x}$ .

A.  $\int f'(x)e^{2x}dx = (4-2x)e^x + C$

B.  $\int f'(x)e^{2x}dx = (x-2)e^x + C$

C.  $\int f'(x)e^{2x}dx = \frac{2-x}{2}e^x + C$

D.  $\int f'(x)e^{2x}dx = (2-x)e^x + C$

**Câu 151. (HỌC MÃI NĂM 2018-2019-LẦN 02)** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = xe^x$  và  $f(0) = 2$ . Tính  $f(1)$ .

A.  $f(1) = 3$ .

B.  $f(1) = e$ .

C.  $f(1) = 5 - e$ .

D.  $f(1) = 8 - 2e$ .

**Câu 152. (THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = 2$ . Tất cả các nguyên hàm của  $f(x)e^{2x}$  là

A.  $(x-2)e^x + e^x + C$

B.  $(x+2)e^{2x} + e^x + C$

C.  $(x-1)e^x + C$

D.  $(x+1)e^x + C$

**Câu 153. (ĐỀ GK2 VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = (x+1)e^x, f(0) = 0$  và  $\int f(x)dx = (ax+b)e^x + c$  với  $a, b, c$  là các hằng số. Khi đó:

A.  $a + b = 2$ .

B.  $a + b = 3$ .

C.  $a + b = 1$ .

D.  $a + b = 0$ .

**Câu 154. (THPT NGUYỄN THỊ MINH KHAI - HÀ TĨNH - 2018)** Gọi  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = xe^{-x}$ . Tính  $F(x)$  biết  $F(0) = 1$ .

A.  $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 2$ .

B.  $F(x) = (x+1)e^{-x} + 1$ .

C.  $F(x) = (x+1)e^{-x} + 2$ .

D.  $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 1$ .

**Câu 155. (SỞ GD&ĐT QUẢNG NAM - 2018)** Biết  $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$  với  $a, b$  là các số hữu tỉ. Tính tích  $ab$ ?

A.  $ab = \frac{1}{8}$ .

B.  $ab = \frac{1}{4}$ .

C.  $ab = -\frac{1}{8}$ .

D.  $ab = -\frac{1}{4}$ .

**Câu 156. (THPT CHUYÊN ĐH VINH - LẦN 3 - 2018)** Giả sử  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x^2}$  sao cho  $F(-2) + F(1) = 0$ . Giá trị của  $F(-1) + F(2)$  bằng

A.  $\frac{10}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5$ .

B. 0.

C.  $\frac{7}{3} \ln 2$ .

D.  $\frac{2}{3} \ln 2 + \frac{3}{6} \ln 5$ .

**Câu 157. (THCS&THPT NGUYỄN KHUYẾN - BÌNH DƯƠNG - 2018)** Gọi  $g(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \ln(x-1)$ . Cho biết  $g(2) = 1$  và  $g(3) = a \ln b$  trong đó  $a, b$  là các số nguyên dương phân biệt. Hãy tính giá trị của  $T = 3a^2 - b^2$

A.  $T = 8$ .

B.  $T = -17$ .

C.  $T = 2$ .

D.  $T = -13$ .

**Dạng 5. Sử dụng nguyên hàm để giải toán**

**Câu 158. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f(2) = -\frac{1}{25}$  và  $f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Giá trị của  $f(1)$  bằng

- A.  $-\frac{391}{400}$       B.  $-\frac{1}{40}$       C.  $-\frac{41}{400}$       D.  $-\frac{1}{10}$

**Câu 159. (THPT NGUYỄN TRÃI - ĐÀ NẴNG - 2018)** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $y' = xy^2$  và  $f(-1) = 1$  thì giá trị  $f(2)$  là

- A.  $e^2$ .      B.  $2e$ .      C.  $e+1$ .      D.  $e^3$ .

**Câu 160. (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) \neq 0$  với mọi  $x$  và thỏa mãn  $f(1) = -\frac{1}{2}$ ,  $f'(x) = (2x+1)f^2(x)$ . Biết  $f(1) + f(2) + \dots + f(2019) = \frac{a}{b} - 1$  với  $a, b \in \mathbb{N}, (a, b) = 1$ . Khẳng định nào sau đây sai?

- A.  $a - b = 2019$ .      B.  $ab > 2019$ .      C.  $2a + b = 2022$ .      D.  $b \leq 2020$ .

**Câu 161. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $(0; +\infty)$  thỏa mãn  $2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x}$ . Biết  $f(1) = \frac{1}{2}$ . Tính  $f(4)$ ?

- A. 24.      B. 14.      C. 4.      D. 16.

**Câu 162. (THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 01 NĂM 2018-2019)** Cho hàm số  $f(x) > 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(0) = 1$  và  $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot f'(x)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $f(x) < 2$       B.  $2 < f(x) < 4$       C.  $f(x) > 6$       D.  $4 < f(x) < 6$

**Câu 163. (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH LẦN 1 NĂM 2018-2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[2; 4]$  và  $f'(x) > 0, \forall x \in [2; 4]$ . Biết  $4x^3 f(x) = [f'(x)]^3 - x^3, \forall x \in [2; 4], f(2) = \frac{7}{4}$ .

Giá trị của  $f(4)$  bằng

- A.  $\frac{40\sqrt{5}-1}{2}$ .      B.  $\frac{20\sqrt{5}-1}{4}$ .      C.  $\frac{20\sqrt{5}-1}{2}$ .      D.  $\frac{40\sqrt{5}-1}{4}$ .

**Câu 164. (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 03)** Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(x) + f'(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = 1$ . Tính  $f(1)$ .

- A.  $\frac{2}{e}$ .      B.  $\frac{1}{e}$ .      C.  $e$ .      D.  $\frac{e}{2}$ .

**Câu 165. (THPT NGHĨA HƯNG NĐ- GK2 - 2018 - 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x).f''(x)]$  với mọi  $x$  dương. Biết  $f(1) = f'(1) = 1$ . Giá trị  $f^2(2)$  bằng

A.  $f^2(2) = \sqrt{2\ln 2 + 2}$ . B.  $f^2(2) = 2\ln 2 + 2$ .

C.  $f^2(2) = \ln 2 + 1$ . D.  $f^2(2) = \sqrt{\ln 2 + 1}$ .

**Câu 166. (CHUYÊN BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 03)** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $(f'(x))^2 + f(x).f''(x) = x^3 - 2x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = f'(0) = 1$ . Tính giá trị của  $T = f^2(2)$

A.  $\frac{43}{30}$  B.  $\frac{16}{15}$  C.  $\frac{43}{15}$  D.  $\frac{26}{15}$

**Câu 167. (SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục và có đạo hàm trên  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ , thỏa mãn  $f(x) + \tan x.f'(x) = \frac{x}{\cos^3 x}$ . Biết rằng  $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = a\pi\sqrt{3} + b\ln 3$  trong đó  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Giá trị của biểu thức  $P = a + b$  bằng

A.  $\frac{14}{9}$  B.  $-\frac{2}{9}$  C.  $\frac{7}{9}$  D.  $-\frac{4}{9}$

**Câu 168. (KTNL GV THPT LÝ THÁI TÔ NĂM 2018-2019)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục và dương trên  $(0; +\infty)$  thỏa mãn  $f'(x) + (2x + 4).f^2(x) = 0$  và  $f(0) = \frac{1}{3}$ . Tính tổng

$S = f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(2018) = \frac{a}{b}$  với  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{a}{b}$  tối giản. Khi đó  $b - a = ?$

A. -1. B. 1011. C. 1. D. 2018.

**Câu 169. (THPT YÊN PHONG SỐ 1 BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ ;  $y = f(x)$  liên tục, nhận giá trị dương trên  $(0; +\infty)$  và thỏa mãn  $f(3) = \frac{4}{9}$  và  $[f'(x)]^2 = (x+1).f(x)$ . Tính  $f(8)$ .

A.  $f(8) = 49$ . B.  $f(8) = 256$ . C.  $f(8) = \frac{1}{16}$ . D.  $f(8) = \frac{49}{64}$ .

**Câu 170.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f(1) = 2$  và  $(x^2 + 1)^2 f'(x) = [f(x)]^2 (x^2 - 1)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Giá trị của  $f(2)$  bằng

A.  $\frac{2}{5}$  B.  $-\frac{2}{5}$  C.  $-\frac{5}{2}$  D.  $\frac{5}{2}$

**Câu 171. (CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH YÊN BÁI LẦN 01 NĂM 2018-2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$

có đạo hàm liên tục trên khoảng  $(0; +\infty)$ , biết  $f'(x) + (2x+1)f^2(x) = 0$ ,  $f(x) > 0$ ,  $\forall x > 0$  và  $f(2) = \frac{1}{6}$ .

Tính giá trị của  $P = f(1) + f(2) + \dots + f(2019)$ .

- A.  $\frac{2021}{2020}$ .      B.  $\frac{2020}{2019}$ .      C.  $\frac{2019}{2020}$ .      D.  $\frac{2018}{2019}$ .

**Câu 172.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[-2; 1]$  thỏa mãn  $f(0) = 3$  và  $(f(x))^2 \cdot f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$ . Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-2; 1]$  là

- A.  $2\sqrt[3]{42}$ .      B.  $2\sqrt[3]{15}$ .      C.  $\sqrt[3]{42}$ .      D.  $\sqrt[3]{15}$ .

**Câu 173. (ĐỀ THI CÔNG BẰNG KHTN LẦN 02 NĂM 2018-2019)** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f(1) = 4$  và  $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$  với mọi  $x > 0$ . Giá trị của  $f(2)$  bằng

- A. 5.      B. 10.      C. 20.      D. 15.

**Câu 174. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn các điều kiện:  $f(0) = 2\sqrt{2}$ ,  $f(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(x) \cdot f'(x) = (2x+1)\sqrt{1+f^2(x)}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Khi đó giá trị  $f(1)$  bằng

- A.  $\sqrt{26}$ .      B.  $\sqrt{24}$ .      C.  $\sqrt{15}$ .      D.  $\sqrt{23}$ .

**Câu 175. (SGD&ĐT CẦN THƠ - HKII - 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 2x^2 - x + 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = f'(0) = 3$ . Giá trị của  $[f(1)]^2$  bằng

- A. 28.      B. 22.      C.  $\frac{19}{2}$ .      D. 10.

**Câu 176. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG - TPHCM - 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$  và  $f(0) = \frac{1}{2}$ . Tính  $f(2)$ .

- A.  $f(2) = \frac{e}{3}$ .      B.  $f(2) = \frac{e}{6}$ .      C.  $f(2) = \frac{e^2}{3}$ .      D.  $f(2) = \frac{e^2}{6}$ .

**Câu 177. (LIÊN TRƯỜNG - NGHỆ AN - LẦN 2 - 2018)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$  thỏa mãn điều kiện  $f(1) = -2\ln 2$  và  $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$ . Giá trị  $f(2) = a + b \ln 3$ , với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Tính  $a^2 + b^2$ .

- A.  $\frac{25}{4}$ .      B.  $\frac{9}{2}$ .      C.  $\frac{5}{2}$ .      D.  $\frac{13}{4}$ .

**Câu 178. (THPT LÊ XOAY - LẦN 3 - 2018)** Giả sử hàm số  $y = f(x)$  liên tục, nhận giá trị dương trên  $(0; +\infty)$  và thỏa mãn  $f(1) = 1$ ,  $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1}$ , với mọi  $x > 0$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $2 < f(5) < 3$ .      B.  $1 < f(5) < 2$ .      C.  $4 < f(5) < 5$ .      D.  $3 < f(5) < 4$ .

**Câu 179. (THPT HÀ HUY TẬP - LẦN 2 - 2018)** Giả sử hàm số  $y = f(x)$  liên tục nhận giá trị dương trên  $(0; +\infty)$  và thỏa mãn  $f(1) = 1$ ,  $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1}$ , với mọi  $x > 0$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $3 < f(5) < 4$ .      B.  $1 < f(5) < 2$ .      C.  $4 < f(5) < 5$ .      D.  $2 < f(5) < 3$ .

**Câu 180. (THPT QUỲNH LƯU - NGHỆ AN - 2018)** Cho hàm số  $f(x) \neq 0$  thỏa mãn điều kiện  $f'(x) = (2x+3)f^2(x)$  và  $f(0) = -\frac{1}{2}$ . Biết rằng tổng  $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{a}{b}$  với  $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*)$  và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\frac{a}{b} < -1$ .      B.  $\frac{a}{b} > 1$ .      C.  $a + b = 1010$ .      D.  $b - a = 3029$ .

**Câu 181. (THPT NAM TRỰC - NAM ĐỊNH - 2018)** Cho hàm số  $f(x) \neq 0$ ,  $f'(x) = \frac{3x^4 + x^2 - 1}{x^2} f^2(x)$  và  $f(1) = -\frac{1}{3}$ . Tính  $f(1) + f(2) + \dots + f(80)$ .

- A.  $-\frac{3240}{6481}$ .      B.  $\frac{6480}{6481}$ .      C.  $-\frac{6480}{6481}$ .      D.  $\frac{3240}{6481}$ .

**Câu 182. (SỞ GD&ĐT HÀ TĨNH - 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  đồng biến có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn  $[0; 2]$  và thỏa mãn  $[f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ . Biết  $f(0) = 1$ ,  $f(2) = e^6$ . Khi đó  $f(1)$  bằng

- A.  $e^{\frac{3}{2}}$ .      B.  $e^3$ .      C.  $e^{\frac{5}{2}}$ .      D.  $e^2$ .

**Dạng 6. Một số bài toán khác liên quan đến nguyên hàm**

**Câu 183. (THPT CHUYÊN NGUYỄN QUANG ĐIỀU - ĐỒNG THÁP - 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  thỏa mãn  $f'(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $f(0) = 2017$ ,  $f(2) = 2018$ . Tính  $S = (f(3) - 2018)(f(-1) - 2017)$ .

- A.  $S = 1$ .      B.  $S = 1 + \ln^2 2$ .      C.  $S = 2 \ln 2$ .      D.  $S = \ln^2 2$ .

**Câu 184. (KIM LIÊN - HÀ NỘI - LẦN 1 - 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên khoảng  $(0; +\infty) \setminus \{e\}$  thỏa mãn  $f'(x) = \frac{1}{x(\ln x - 1)}$ ,  $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln 6$  và  $f(e^2) = 3$ . Giá trị của biểu thức  $f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e^3)$  bằng

- A.  $3 \ln 2 + 1$ .      B.  $2 \ln 2$ .      C.  $3(\ln 2 + 1)$ .      D.  $\ln 2 + 3$ .

**Câu 185. (QUẢNG XƯƠNG - THANH HÓA - LẦN 1 - 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$  thỏa mãn  $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$ ,  $f(-3) - f(3) = 0$  và  $f(0) = \frac{1}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $f(-4) + f(-1) - f(4)$  bằng

- A.  $\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}$ .      B.  $\ln 80 + 1$ .      C.  $\frac{1}{3} \ln \frac{4}{5} + \ln 2 + 1$ .      D.  $\frac{1}{3} \ln \frac{8}{5} + 1$ .

**Câu 186. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ - 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$  thỏa mãn  $f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$ ,  $f(-2) + f(2) = 0$  và  $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ . Tính  $f(-3) + f(0) + f(4)$  được kết quả

- A.  $\ln \frac{6}{5} + 1$ .      B.  $\ln \frac{6}{5} - 1$ .      C.  $\ln \frac{4}{5} + 1$ .      D.  $\ln \frac{4}{5} - 1$ .

**Câu 187. [KIM LIÊN - HÀ NỘI - LẦN 1 - 2018]** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên khoảng  $(0; +\infty) \setminus \{e\}$  thỏa mãn  $f'(x) = \frac{1}{x(\ln x - 1)}$ ,  $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln 6$  và  $f(e^2) = 3$ . Giá trị của biểu thức  $f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e^3)$  bằng

- A.  $3 \ln 2 + 1$ .      B.  $2 \ln 2$ .      C.  $3(\ln 2 + 1)$ .      D.  $\ln 2 + 3$ .

**Câu 188. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ - 2018)** Biết  $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x - 3}$  ( $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ) là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 11}{\sqrt{2x - 3}}$  trên khoảng  $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ . Tính  $T = a + b + c$ .

- A.  $T = 8$ .      B.  $T = 5$ .      C.  $T = 6$ .      D.  $T = 7$ .

**Câu 189. (THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 1)** Gọi  $F(x) = (ax^2 + bx + c).e^x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (x - 1)^2 . e^x$ . Tính  $S = a + 2b + c$ .

- A.  $S = 3$ .      B.  $S = -2$ .      C.  $S = 0$ .      D.  $S = 4$ .

**Câu 190. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019)** Cho hàm số  $f(x) = 2x^2 e^{x^3+2} + 2x e^{2x}$ , ta có  $\int f(x) dx = m e^{x^3+2} + n x e^{2x} - p e^{2x} + C$ . Giá trị của biểu thức  $m + n + p$  bằng

- A.  $\frac{1}{3}$       B. 2      C.  $\frac{13}{6}$       D.  $\frac{7}{6}$

**Câu 191. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG TRỊ NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Biết rằng hàm số  $F(x) = mx^3 + (3m + n)x^2 - 4x + 3$  là một nguyên hàm của hàm số

$f(x) = 3x^2 + 10x - 4$ . Tính  $mn$ .

- A.  $mn = 1$ .      B.  $mn = 2$ .      C.  $mn = 0$ .      D.  $mn = 3$ .

**Câu 192.** Biết  $F(x) = -\frac{(x-a)\cos 3x}{b} + \frac{1}{c} \sin 3x + 2019$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (x-2)\sin 3x$  (với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ). Giá trị của  $ab + c$  bằng

A. 14.

B. 15.

C. 10.

D. 18.

**Câu 193. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019)** Cho hàm số  $f(x) = 2x^2e^{x^3+2} + 2xe^{2x}$ , ta có  $\int f(x)dx = me^{x^3+2} + nxe^{2x} - pe^{2x} + C$ . Giá trị của biểu thức  $m+n+p$  bằng

A.  $\frac{1}{3}$ 

B. 2

C.  $\frac{13}{6}$ D.  $\frac{7}{6}$ 

**Câu 194. (ĐỀ 15 LOVE BOOK NĂM 2018-2019)** Biết  $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$   $a, b, c \in \mathbb{Z}$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 11}{\sqrt{2x-3}}$  trên khoảng  $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ . Tính  $T = a + b + c$ .

A.  $T = 8$ .B.  $T = 5$ .C.  $T = 6$ .D.  $P = 7$ .

**Câu 195.** Cho hàm số  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = 2019^x(x^2 - 4)(x^2 - 3x + 2)$ . Khi đó số điểm cực trị của hàm số  $F(x)$  là

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

**Câu 196. (THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 01 NĂM 2018-2019)** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^{x^2}(x^3 - 4x)$ . Hàm số  $F(x^2 + x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6.

B. 5.

C. 3.

D. 4.

**Câu 197. (CỤM 8 TRƯỜNG CHUYÊN LẦN 1)** Biết  $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (2x^2 - 5x + 2)e^{-x}$  trên  $\mathbb{R}$ . Giá trị biểu thức  $f(F(0))$  bằng:

A.  $\frac{-1}{e}$ .B.  $3e$ .C.  $20e^2$ .D.  $9e$ .

**Câu 198. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho  $F(x) = \int \frac{(1 + \cos^2 x)(\sin x + \cot x)}{\sin^4 x} dx$  và  $S$  là tổng tất cả các nghiệm của phương trình  $F(x) = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$  trên khoảng  $(0; 4\pi)$ . Tổng  $S$  thuộc khoảng

A.  $(6\pi; 9\pi)$ .B.  $(2\pi; 4\pi)$ .C.  $(4\pi; 6\pi)$ .D.  $(0; 2\pi)$ .

**Câu 199. (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2018-2019 LẦN 1)** Cho hàm số  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$  trên khoảng  $(0; \pi)$ . Biết rằng giá trị lớn nhất của  $F(x)$  trên khoảng  $(0; \pi)$  là  $\sqrt{3}$ . Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A.  $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 4$ B.  $F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ C.  $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ D.  $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3 - \sqrt{3}$



## PHẦN B. ĐÁP ÁN THAM KHẢO

### Dạng 1. Nguyên hàm cơ bản (dùng bảng nguyên hàm)

#### Dạng 1.1 Tìm nguyên hàm cơ bản không có điều kiện

Câu 1. Chọn A

$$\int f(x) dx = \int (x^4 + x^2) dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Câu 2. Chọn D

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int (2x+4) dx = x^2 + 4x + C.$$

Câu 3.

Lời giải

Chọn B

$$\int (2x+6) dx = x^2 + 6x + C$$

Câu 4. Chọn A

Câu 5. Chọn A

$$\int (x^3 + x^2) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Câu 6. Chọn A

$$\text{Ta có } \int (2x+3) dx = x^2 + 3x + C.$$

Câu 7. Chọn B

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \sqrt{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int (2x-1)^{\frac{1}{2}} d(2x-1) \\ &= \frac{1}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} + C \end{aligned}$$

Câu 8.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int \left( x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$$

Câu 9. Chọn A

$$\text{Áp dụng công thức } \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C \quad (a \neq 0) \text{ ta được } \int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C.$$

Câu 10. Chọn B

$$\text{Ta có: } \int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$$

Câu 11. Chọn A

Câu 12. Chọn C

Câu 13. Chọn B

Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2x + 5$  là  $F(x) = x^2 + 5x + C$ .

Câu 14. Chọn A

Áp dụng công thức  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ , ( $0 < a \neq 1$ ) ta được đáp án B

Câu 15. Chọn C

Áp dụng công thức  $\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$  với  $a \neq 0$ ; thay  $a = 2$  và  $b = 0$  để có kết quả.

Câu 16. Chọn C

$$\text{Ta có } \int (x^4 + x) dx = \frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{2} x^2 + C.$$

Câu 17. Chọn D

$$\int (3x^2 + 1) dx = x^3 + x + C.$$

Câu 18. Chọn D

$$\int x(x^2 + 7)^{15} dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 7)^{15} d(x^2 + 7) = \frac{1}{32} (x^2 + 7)^{16} + C$$

Câu 19. Ta có:  $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C$ , với  $C$  là hằng số bất kì.

$$\text{Câu 20. Ta có } \int (x - \sin 2x) dx = \int x dx - \int \sin 2x dx = \frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + C.$$

$$\text{Câu 21. Ta có: } \int e^{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x-1} d(2x-1) = \frac{1}{2} e^{2x-1} + C.$$

Câu 22.

$$\text{Câu 23. Ta có: } \int \left( x^2 - 3^x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}.$$

Câu 24.  $\int \sin 3x \, dx = -\frac{\cos 3x}{3} + C$

Câu 25. Ta có  $\int (3x^2 + \sin x) \, dx = x^3 - \cos x + C$ .

Câu 26. Ta có:  $\int \ln x \, dx = \frac{1}{x} + C$  sai.

Câu 27. Có  $f(x) = (4x^3 + x^2 + C)' = 12x^2 + 2x$ .

Câu 28. Ta có:  $\int e^x \, dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C$  sai vì  $\int e^x \, dx = e^x + C$ .

Câu 29. Do theo bảng nguyên hàm:  $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ .

Câu 30.

Lời giải

Chọn B.

Câu 31. Ta có  $\int f(x) \, dx = \int (3x - \sin x) \, dx = \frac{3x^2}{2} + \cos x + C$ .

Câu 32. Chọn C

Theo bảng nguyên hàm cơ bản

Câu 33. Ta có  $\int \cos x \, dx = \sin x + C$ .

Câu 34. Ta có  $\int f(x) \, dx = \int (x^4 + x^2) \, dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$ .

Câu 35. Ta có:  $\int (e^x - 2x) \, dx = e^x - x^2 + C$

Câu 36.  $\int (\cos x + x) \, dx = \sin x + \frac{1}{2}x^2 + C$ .

Câu 37. Ta có:

$$\int (x^2 - 3x + \frac{1}{x}) \, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C.$$

Câu 38. Ta có  $\int f(x) \, dx = \int \left( \frac{1}{x} + \sin x \right) \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx + \int \sin x \, dx = \ln|x| - \cos x + C$ .

Câu 39. Gọi  $F(x) = \frac{1}{3}x^3$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$ .

Suy ra  $F'(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = x^2$ .

Câu 40. Ta có:  $\int f(x) dx = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$

Câu 41. Ta có:  $\int f(x) dx = \int \frac{x^4 + 2}{x^2} dx = \int \left( x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$

Câu 42. Ta có:  $(e^x)' = e^x \Rightarrow y = e^x$  là một nguyên hàm của hàm số  $y = e^x.$

Câu 43. Ta có:  $F(x) = \int e^2 dx = e^2 x + C.$

Câu 44. Trên khoảng  $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ , ta có:  $\int f(x) dx = \int \frac{1}{1-2x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1-2x} d(1-2x) = -\frac{1}{2} \ln|2x-1| + C.$

Câu 45. Chọn B

Câu 46. Ta có  $\int (2^x + x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{1}{2} x^2 + C.$

Câu 47. Ta có  $\int f(x) dx = \int (1 + \sin x) dx = x - \cos x + C.$

Câu 48. Sử dụng công thức  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$  ta được:

$$\int \left( \frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + x - 2019 \right) dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2019x + C = \frac{1}{12} x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - 2019x + C.$$

Câu 49. Ta có  $\int f(x) dx = \int (2^x - x^2) dx = \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{x^3}{3} + C.$

Câu 50. Ta có:  $\int \frac{1}{3x-1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x-1)}{3x-1} = \frac{1}{3} \ln|3x-1| + C = \frac{1}{3} \ln(1-3x) + C$  (do  $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ )

Câu 51. Chọn A

Ta có:  $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$

Câu 52. Chọn B

Ta có  $\int f(x) dx = \int \frac{2x^4 + 3}{x^2} dx = \int \left( 2x^2 + \frac{3}{x^2} \right) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C$

Câu 53. Ta có:  $\int (2^x + x + 1) dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C.$

Câu 54. Chọn C

Ta có  $\int f(x)dx = \int (3x - \sin x)dx = \frac{3x^2}{2} + \cos x + C$ .

**Câu 55.** Chọn A

Ta có  $f(x) = F'(x) \Rightarrow f(x) = (e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$ .

**Câu 56.** Chọn A

Ta có  $\int f(x)dx = \int 3^{-x} dx = -\int 3^{-x} d(-x) = -\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$ .

**Câu 57.** Chọn A

$\int f(x)dx = \int (x^3 + x^2)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C$ .

**Câu 58.** Ta có:  $\int x^{2019} dx = \frac{x^{2020}}{2020} + C$ ,  $C$  là hằng số. Nên các phương án A, B, D đều là nguyên hàm của hàm số  $y = x^{2019}$ .

**Câu 59.** Ta có:  $\int \left(x^2 - 3^x + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in R$ .

**Câu 60.**  $\int f(x)dx = \int e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5}\right) dx = \int \left(2017e^x - \frac{2018}{x^5}\right) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C$

**Câu 61.** Ta có:  $y = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right) = 2e^x + \frac{1}{\cos^2 x}$

$\int y dx = \int \left(2e^x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = 2e^x + \tan x + C$ .

**Câu 62.** Ta có:  $\int f(x)dx = \int \frac{1}{2\sqrt{2x-1}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{2x-1}} dx = \frac{1}{2} \int (2x-1)^{-\frac{1}{2}} dx$   
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(2x-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2} \sqrt{2x-1} + C$ .

**Câu 63.** Ta có:  $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \Rightarrow F(x) = \int (x^3 + 6x^2 + 11x + 6) dx = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C$ .

**Câu 35.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x+3}{x^2+3x+2}$  là

A.  $\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C$ .      B.  $2\ln|x+1| + \ln|x+2| + C$ .

C.  $2\ln|x+1| - \ln|x+2| + C$ . D.  $-\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C$ . Ta có

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+3x+2} = \frac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

Suy ra họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x+3}{x^2+3x+2}$  là

{ Các chữ d trong vi phân chưa đúng chuẩn }

$$\int f(x) dx = \int \left( \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = 2\ln|x+1| - \ln|x+2| + C$$

**Câu 64. Chọn C**

Ta có  $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2} = \frac{3(x-2)+4}{(x-2)^2} = \frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2}$ . Do đó

$$\int \frac{3x-2}{(x-2)^2} dx = \int \left( \frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} \right) dx = 3\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} + C.$$

**Câu 65. Chọn B**

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int \frac{2x-1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{2(x+1)-3}{(x+1)^2} dx = \int \left[ \frac{2}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} \right] dx = 2\ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + C.$$

**Câu 66. Chọn D**

$$\text{Ta có } f(x) \cdot e^{2x} = F'(x) = 2x \Rightarrow f(x) = \frac{2x}{e^{2x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2e^{2x} - 4xe^{2x}}{e^{4x}} = \frac{2-4x}{e^{2x}}$$

$$\text{Suy ra } f'(x)e^{2x} = 2-4x \text{ nên } \int f'(x) \cdot e^{2x} dx = -2x^2 + 2x + C.$$

**Dạng 1.2 Tìm nguyên hàm cơ bản có điều kiện**

**Câu 67. Chọn C**

$$\text{Có } F(x) = \int f(x) dx = \int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$$

$$\text{Do } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} + C = 2 \Leftrightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = -\cos x + \sin x + 1.$$

**Câu 68. Chọn A**

$$\text{Ta có } F(x) = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C$$

$$\text{Theo bài ra ta có: } F(0) = 1 + C = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2}.$$

**Câu 69. Chọn C**

$$\text{Ta có } f(x) = \int (3 - 5 \sin x) dx = 3x + 5 \cos x + C$$

Theo giả thiết  $f(0) = 10$  nên  $5 + C = 10 \Rightarrow C = 5$ .

$$\text{Vậy } f(x) = 3x + 5 \cos x + 5.$$

**Câu 70. Chọn C**

$$\int \frac{2}{2x-1} dx = \ln|2x-1| + C = f(x)$$

$$\text{Với } x < \frac{1}{2}, f(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \text{ nên } f(-1) = 1 + \ln 3$$

$$\text{Với } x > \frac{1}{2}, f(1) = 2 \Rightarrow C = 2 \text{ nên } f(3) = 2 + \ln 5$$

$$\text{Nên } f(-1) + f(3) = 3 + \ln 15$$

**Câu 71.**

Lời giải

**Chọn B**

$$F(x) = \int \frac{1}{x-1} dx + C = \ln|x-1| + C$$

$$F(e+1) = 4. \text{ Ta có } 1 + C = 4 \Rightarrow C = 3$$

**Câu 72.** Ta có:  $f(x) = \int f'(x) dx = \int (2 - 5 \sin x) dx = 2x + 5 \cos x + C$ .

Mà  $f(0) = 10$  nên  $5 + C = 10 \Rightarrow C = 5$ .

$$\text{Vậy } f(x) = 2x + 5 \cos x + 5.$$

$$\text{Câu 73. } F(x) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C; F(0) = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2}.$$

$$\text{Khi đó } F(\ln 3) = \frac{1}{2} e^{2 \ln 3} - \frac{1}{2} = 4.$$

**Câu 74.** Ta có đáp án là đạo hàm của hàm số  $F(x) = x^2 \ln(\sin x - \cos x)$

$$\Rightarrow F'(x) = f(x)$$

Đạo hàm của hàm số  $F(x) = x^2 \ln(\sin x - \cos x)$  là:

$$F'(x) = f(x) = (x^2)' \cdot \ln(\sin x - \cos x) + x^2 \cdot [\ln(\sin x - \cos x)]' = 2x \cdot \ln(\sin x - \cos x) + x^2 \cdot \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}.$$

$\Rightarrow$  Đáp án B.

**Câu 75.**  $F(x) = \int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{\sin 3x}{3} + 1 \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{3} + 1 = \frac{\sqrt{3} + 6}{6}.$$

**Câu 76.** Ta có  $\int f(x) dx = \int 2^x (2^{-x} + 5) dx = \int (1 + 5 \cdot 2^x) dx = x + 5 \left( \frac{2^x}{\ln 2} \right) + C.$

**Câu 77.** Chọn D

Ta có  $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C.$

Theo đề ra ta được:  $F(0) = \frac{201}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot e^0 + C = \frac{201}{2} \Leftrightarrow C = 100.$

Vậy  $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + 100 \Rightarrow F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} e^{2 \cdot \frac{1}{2}} + 100 = \frac{1}{2} e + 100.$

**Câu 78.** Chọn C

Theo giả thiết ta có:  $f(x) = 1$  và  $g(x) = 2x$  nên  $f(x) \cdot g(x) = 2x.$

$F(x) = \int 2x dx = x^2 + C.$  Vì  $F(1) = 3 \Rightarrow C = 2.$  Vậy một nguyên hàm  $F(x)$  cần tìm của hàm số  $f(x) \cdot g(x)$ , là  $F(x) = x^2 + 2.$

**Câu 79.**

Lời giải

Cách 1:

Ta có:  $\int f(x) dx = \int \frac{1}{x-2} dx = \ln|x-2| + C, C \in \mathbb{R}.$

Giả sử  $F(x) = \ln|x-2| + C_0$  là một nguyên hàm của hàm số đã cho thỏa mãn  $F(1) = 2.$

Do  $F(1) = 2 \Rightarrow C_0 = 2 \Rightarrow F(x) = \ln|x-2| + 2.$  Vậy  $F(0) = 2 + \ln 2.$

**Câu 80.** Ta có  $F(x) = \int f(x) dx = \int \left( ax + \frac{b}{x^2} \right) dx = \frac{1}{2} ax^2 - \frac{b}{x} + C.$



$$\text{Theo bài ra } \begin{cases} F(-1)=1 \\ F(1)=4 \\ f(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a+b+C=1 \\ \frac{1}{2}a-b+C=4 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\frac{3}{2} \\ a=\frac{3}{2} \\ C=\frac{7}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}.$$

**Câu 81.** Chọn D

$$\text{Ta có } F(x) = \int \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C$$

$$\text{Do } F(0) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln|2 \cdot 0 + 1| + C = 2 \Rightarrow C = 2$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + 2 \Rightarrow F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2.$$

**Câu 82.** Chọn A

$$f'(x) = -\cos x \Rightarrow \int f'(x) dx = \int (-\cos x) dx = -\sin x + C.$$

$$f(0) = 2019 \Leftrightarrow -\sin 0 + C = 2019 \Leftrightarrow C = 2019. \text{ Vậy } f(x) = -\sin x + 2019.$$

**Câu 83.** Chọn C

$$F(x) = \int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{\sin 3x}{3} + 1 \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{3} + 1 = \frac{\sqrt{3} + 6}{6}.$$

**Câu 84.** Ta có  $F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C = \ln(-x) + C$  với  $\forall x \in (-\infty; 0)$ .

$$\text{Lại có } F(-2) = 0 \Leftrightarrow \ln 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\ln 2. \text{ Do đó } F(x) = \ln(-x) - \ln 2 = \ln\left(\frac{-x}{2}\right).$$

$$\text{Vậy } F(x) = \ln\left(\frac{-x}{2}\right) \quad \forall x \in (-\infty; 0).$$

**Câu 85.** Ta có:  $\int f'(x) dx = \int (2e^{2x} + 1) dx = e^{2x} + x + C.$

Suy ra  $f(x) = e^{2x} + x + C$ .

Theo bài ra ta có:  $f(0) = 2 \Rightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1$ .

Vậy:  $f(x) = e^{2x} + x + 1$ .

**Câu 86.** Ta có  $\int f(x) dx = \int (2x + e^x) dx = x^2 + e^x + C$ .

Có  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  và  $F(0) = 2019$ .

Suy ra  $\begin{cases} F(x) = x^2 + e^x + C \\ F(0) = 2019 \end{cases} \Rightarrow 1 + C = 2019 \Leftrightarrow C = 2018$ .

Vậy  $F(x) = x^2 + e^x + 2018$ .

**Câu 87.** Trên khoảng  $(1; +\infty)$  ta có  $\int f'(x) dx = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln(x-1) + C_1 \Rightarrow f(x) = \ln(x-1) + C_1$ .

Mà  $f(2) = 2018 \Rightarrow C_1 = 2018$ .

Trên khoảng  $(-\infty; 1)$  ta có  $\int f'(x) dx = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln(1-x) + C_2 \Rightarrow f(x) = \ln(1-x) + C_2$ .

Mà  $f(0) = 2017 \Rightarrow C_2 = 2017$ .

Vậy  $f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) + 2018 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(1-x) + 2017 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ . Suy ra  $f(3) - f(-1) = 1$ .

**Câu 88.** Ta có:  $\frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{(A+B)x + (-2A+B)}{(x+1)(x-2)}$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ -2A+B=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=5 \\ B=-3 \end{cases}$ .

Khi đó:  $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = \int \left( \frac{5}{x+1} - \frac{3}{x-2} \right) dx = 5 \ln|x+1| - 3 \ln|x-2| + C$ .

Suy ra  $a = 5; b = -3$  nên  $a - b = 8$ .

**Câu 89.** Ta có:  $\frac{1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{D}{x+1} = \frac{A(x^2-1) + Bx(x+1) + Dx(x-1)}{x^3-x}$   
 $= \frac{(A+B+D)x^2 + (B-D)x - A}{x^3-x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+D=0 \\ B-D=0 \\ -A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=\frac{1}{2} \\ D=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Khi đó:  $\int \frac{1}{x^3-x} dx = \int \left( -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} \right) dx = \frac{1}{2} \ln |(x-1)(x+1)| - \ln |x| + C.$

Suy ra  $a = \frac{1}{2}$ ;  $b = -1$  nên  $P = 2a + b = 0.$

**Câu 90.** Ta có:  $\frac{4x+11}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{(A+B)x+(3A+2B)}{(x+2)(x+3)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=4 \\ 3A+2B=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=1 \end{cases}.$$

Khi đó:  $\int \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx = \int \left( \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right) dx = 3 \ln |x+2| + \ln |x+3| + C.$

Suy ra  $a = 3$ ;  $b = 1$  nên  $P = a^2 + ab + b^2 = 13.$

**Câu 91.** Ta có  $f'(1) = 3 \Rightarrow a + b = 3$  (1).

Hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng  $(0; +\infty)$ , các điểm  $x = 1$ ,  $x = \frac{1}{2}$  đều thuộc  $(0; +\infty)$  nên

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left( ax^2 + \frac{b}{x^3} \right) dx = \frac{ax^3}{3} - \frac{b}{2x^2} + C.$$

$$+ f(1) = 2 \Rightarrow \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + C = 2 \quad (2).$$

$$+ f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{a}{24} - 2b + C = -\frac{1}{12} \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) ta được hệ phương trình 
$$\begin{cases} a+b=3 \\ \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + C = 2 \\ \frac{a}{24} - 2b + C = -\frac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ C=\frac{11}{6} \end{cases} \Rightarrow 2a+b = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$$

**Câu 92.** Ta có  $\int f(x)dx = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

$F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2^x$ , ta có  $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C$  mà  $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$

$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$ .

$T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$

$= \frac{1}{\ln 2} (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2018} + 2^{2019}) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2^{2020} - 1}{2 - 1} = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$

**Câu 93.** Ta có  $\int f(x) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$ .

$$\text{Suy ra } F(x) = \begin{cases} \tan x + C_0, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_1, & x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_2, & x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right) \\ \dots \\ \tan x + C_9, & x \in \left(\frac{17\pi}{2}; \frac{19\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_{10}, & x \in \left(\frac{19\pi}{2}; \frac{21\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F\left(\frac{\pi}{4} + 0\pi\right) = 1 + C_0 = 0 \Rightarrow C_0 = -1 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = 1 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 0 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = 1 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1 \\ \dots \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 9\pi\right) = 1 + C_9 = 9 \Rightarrow C_9 = 8 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 10\pi\right) = 1 + C_{10} = 10 \Rightarrow C_{10} = 9. \end{cases}$$

Vậy  $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi) = \tan 0 - 1 + \tan \pi + \tan 2\pi + 1 + \dots + \tan 10\pi + 9 = 44$ .

## Dạng 2. Sử dụng phương pháp VI PHÂN để tìm nguyên hàm

### Dạng 2.1 Tìm nguyên hàm không có điều kiện

**Câu 94.**  $\int f(x)dx = \int 3 \sin^2 x \cos x dx = \int 3 \sin^2 x d(\sin x) = \sin^3 x + C$ .

**Câu 95.** Ta có:  $\int \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{1 + 3 \cos x} d(1 + 3 \cos x) = -\frac{1}{3} \ln |1 + 3 \cos x| + C$ .

**Câu 96.** Ta có:  $I = \int x f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int f(x^2) dx^2 = \frac{1}{2} (4(x^2)^3 + 2(x^2)) + C = 2x^6 + x^2 + C$ .

**Câu 97.** Ta có  $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2} dx = \int \frac{d(2 + \sin x)}{(2 + \sin x)^2} = -\frac{1}{2 + \sin x} + C$ .

**Câu 98.**  $\int f(x)dx = \int x^2 e^{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3+1} d(x^3+1) = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C.$

**Câu 99.** Ta có  $\int \frac{1}{5x+4} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{5x+4} d(5x+4) = \frac{1}{5} \ln|5x+4| + C.$

**Câu 100. Chọn A**

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{1}{x^9+3x^5} dx = \int \frac{x^3}{(x^4)^2(x^4+3)} dx = \frac{1}{4} \int \frac{dx^4}{(x^4)^2(x^4+3)} = \frac{1}{12} \int \frac{(x^4+3)-x^4}{(x^4)^2(x^4+3)} dx^4 \\ &= \frac{1}{12} \int \frac{dx^4}{(x^4)^2} - \frac{1}{12} \int \frac{dx^4}{x^4(x^4+3)} = -\frac{1}{12x^4} - \frac{1}{36} \ln\left(\frac{x^4}{x^4+3}\right) + C \end{aligned}$$

**Câu 101. Chọn C**

Ta có  $f(x) = \frac{3x-3+2}{(x-1)^2} = \frac{3(x-1)+2}{(x-1)^2} = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$

Vậy  $\int f(x)dx = \int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}\right) dx = 3 \int \frac{d(x-1)}{x-1} + 2 \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2}$

$$= 3 \ln|x-1| + 2 \int (x-1)^{-2} d(x-1) = 3 \ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + C \text{ vì } x > 1.$$

**Câu 102.** Ta có  $\int \sin 2x e^{\sin^2 x} dx = \int e^{\sin^2 x} d(\sin^2 x) = e^{\sin^2 x} + C$

**Dạng 2.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện**

**Câu 103.** Ta có  $F(x) = \int \frac{\sin x dx}{1+3\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{3\cos x+1} = -\frac{1}{3} \ln|3\cos x+1| + C.$

mà  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3} \ln\left|3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+1\right| + C = 2 \Rightarrow C = 2.$

Do đó,  $F(0) = -\frac{1}{3} \ln|3\cos(0)+1| + 2 = -\frac{1}{3} \ln 4 + 2 = -\frac{2}{3} \ln 2 + 2.$

Vậy  $F(0) = -\frac{2}{3} \ln 2 + 2.$

**Câu 104. Chọn C**

Ta có:  $F(x) = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x^4+1} d(x^4+1) = \frac{1}{4} \ln(x^4+1) + C.$

Do  $F(0) = 1$  nên  $\frac{1}{4} \ln(0+1) + C = 1 \Leftrightarrow C = 1.$

Vậy:  $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + 1.$

**Câu 105.** Chọn **A.**

Ta có  $F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{dx}{e^x + 1} = \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x + 1}\right) dx = x - \ln(e^x + 1) + C$

$F(0) = -\ln 2 + C = -\ln 2e \Rightarrow C = -1$  PT:  $F(x) + \ln(e^x + 1) = 2 \Leftrightarrow x - \ln(e^x + 1) - 1 + \ln(e^x + 1) = 2 \Leftrightarrow x = 3.$

**Câu 106.** Ta có:

$$\int \frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx = \int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2017} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2017} d\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{1}{4036} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2018} + C.$$

$\Rightarrow a = 4036, b = 2018$

Do đó:  $a = 2b.$

**Câu 107.** Ta có  $\int f'(x) \cdot f(x) dx = \int (x^4 + x^2) dx + C \Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + C.$

Do  $f(0) = 2$  nên suy ra  $C = 2.$

Vậy  $f^2(2) = 2 \left( \frac{32}{5} + \frac{8}{3} + 2 \right) = \frac{332}{15}.$

**Câu 108.** Ta có  $\int f(x) dx = \int \frac{2017x}{(x^2 + 1)^{2018}} dx = \frac{2017}{2} \int (x^2 + 1)^{-2018} d(x^2 + 1) = \frac{2017}{2} \cdot \frac{(x^2 + 1)^{-2017}}{-2017} + C$   
 $= -\frac{1}{2(x^2 + 1)^{2017}} + C = F(x)$

Mà  $F(1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2 \cdot 2^{2017}} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2^{2018}}$

Do đó  $F(x) = -\frac{1}{2 \cdot (x^2 + 1)^{2017}} + \frac{1}{2^{2018}}$  suy ra

$F(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi  $\frac{1}{2(x^2 + 1)^{2017}}$  lớn nhất  $\Leftrightarrow (x^2 + 1)$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow x = 0$

Vậy  $m = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2018}} = \frac{1 - 2^{2017}}{2^{2018}}.$

### Dạng 3. Sử dụng phương pháp ĐỔI BIẾN để tìm nguyên hàm

#### Dạng 3.1 Tìm nguyên hàm không có điều kiện

Câu 109. Ta có  $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \int (3x+1)^{\frac{1}{3}} d(3x+1) = \frac{1}{4} (3x+1)^{\frac{4}{3}} + C$ .

Câu 110.  $F(x) = \int (2x+3)^5 dx = \int \frac{(2x+3)^5}{2} d(2x+3) = \frac{(2x+3)^6}{12} + C$

Câu 111. Chọn C

Do  $\int \sqrt{3x+2} dx = \frac{1}{3} \int (3x+2)^{\frac{1}{2}} d(3x+2) = \frac{1}{3} \frac{(3x+2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{9} (3x+2)\sqrt{3x+2} + C$

Câu 112. Đặt  $t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx \Rightarrow t dt = dx$

$\Rightarrow \int f(x) dx = \int \sqrt{2x+1} dx = \int t^2 dx = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3} (2x+1)\sqrt{2x+1} + C$ .

49: (THPT AN LÃO HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hàm số  $f(x) = 2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{x}}$ . Hàm số nào dưới đây không là nguyên hàm của hàm số  $f(x)$ ?

A.  $F(x) = 2^{\sqrt{x}} + C$                       B.  $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} - 1) + C$

C.  $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} + 1) + C$         D.  $F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} + C$  Chọn A

Ta có  $F(x) = \int f(x) dx = \int 2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{x}} dx = \int 2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{x}} dx$ .

Đặt  $u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ .

Vậy  $F(x) = 2 \ln 2 \cdot \int 2^u \cdot du = 2 \ln 2 \cdot \frac{2^u}{\ln 2} + C = 2^{\sqrt{x}+1} + C$ .

Phương án B:  $F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} - 2 + C$  thỏa.

Phương án C:  $F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} + 2 + C$  thỏa.

Câu 113.  $t = x-1 \Rightarrow dt = dx$ . Vậy  $\int \frac{x}{(x-1)^4} dx = \int \frac{t+1}{t^4} dt$ .

**Câu 114.** Chọn A

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = u^2 - 1 \Rightarrow dx = 2u du.$$

$$\text{Khi đó } \int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx \text{ trở thành } \int \frac{u^2-4}{u} \cdot 2u du = \int 2(u^2-4) du.$$

**Câu 115.** Cách 1:

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = 3x \cos(2x-5) + C$$

$$\Rightarrow \left( \int f(x) dx \right)' = (3x \cos(2x-5) + C)'$$

$$\Rightarrow f(x) = 3 \cos(2x-5) - 6x \sin(2x-5)$$

$$\Rightarrow f(3x) = 3 \cos(6x-5) - 18x \sin(6x-5)$$

$$\text{Xét } \int f(3x) dx = \int (3 \cos(6x-5) - 18x \sin(6x-5)) dx$$

$$= \int 3 \cos(6x-5) dx - \int 18x \sin(6x-5) dx \quad (1).$$

$$\text{Xét } I = \int 18x \sin(6x-5) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} 3x = u \\ 6 \sin(6x-5) dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 dx = du \\ -\cos(6x-5) = v \end{cases}.$$

$$I = -3x \cos(6x-5) + 3 \int \cos(6x-5) dx, \text{ thay vào (1) ta được } \int f(3x) dx = 3x \cos(6x-5) + C.$$

Cách 2:

$$\text{Đặt } x = 3t \Rightarrow dx = 3dt.$$

$$\text{Khi đó: } \int f(x) dx = 3x \cos(2x-5) + C \Leftrightarrow 3 \int f(3t) dt = 3 \cdot (3t) \cos(2 \cdot 3t - 5) + C$$

$$\Leftrightarrow \int f(3t) dt = 3t \cos(6t-5) + C \Leftrightarrow \int f(3x) dx = 3x \cos(6x-5) + C.$$

**Câu 116.** Xét  $\int f(x) dx = \int x^3 (x^2+1)^{2019} dx = \int x^2 (x^2+1)^{2019} x dx.$

Đổi biến  $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx$ , ta có:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \frac{1}{2} \int (t-1)t^{2019} dt = \frac{1}{2} \int (t^{2020} - t^{2019}) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{t^{2021}}{2021} - \frac{t^{2020}}{2020} \right] + C = \frac{1}{2} \left[ \frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020} \right] + C. \end{aligned}$$

**Câu 117.** Chọn A



Cách 1:

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = 3x \cos(2x-5) + C$$

$$\Rightarrow \left( \int f(x) dx \right)' = (3x \cos(2x-5) + C)'$$

$$\Rightarrow f(x) = 3 \cos(2x-5) - 6x \sin(2x-5)$$

$$\Rightarrow f(3x) = 3 \cos(6x-5) - 18x \sin(6x-5)$$

$$\text{Xét } \int f(3x) dx = \int (3 \cos(6x-5) - 18x \sin(6x-5)) dx$$

$$= \int 3 \cos(6x-5) dx - \int 18x \sin(6x-5) dx \quad (1).$$

$$\text{Xét } I = \int 18x \sin(6x-5) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} 3x = u \\ 6 \sin(6x-5) dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 dx = du \\ -\cos(6x-5) = v \end{cases}$$

$$I = -3x \cos(6x-5) + 3 \int \cos(6x-5) dx, \text{ thay vào (1) ta được } \int f(3x) dx = 3x \cos(6x-5) + C.$$

Cách 2:

$$\text{Đặt } x = 3t \Rightarrow dx = 3dt.$$

$$\text{Khi đó: } \int f(x) dx = 3x \cos(2x-5) + C \Leftrightarrow 3 \int f(3t) dt = 3 \cdot (3t) \cos(2 \cdot 3t - 5) + C$$

$$\Leftrightarrow \int f(3t) dt = 3t \cos(6t-5) + C \Leftrightarrow \int f(3x) dx = 3x \cos(6x-5) + C.$$

**Câu 118. Chọn B**

$$\text{Đặt } x+2=t \Rightarrow x=t-1 \Rightarrow dx=dt \text{ với } t>0$$

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int \frac{2t-1}{t^2} dt = \int \left( \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt = 2 \ln t + \frac{1}{t} + C$$

$$\text{Hay } \int f(x) dx = 2 \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} + C.$$

$$\text{Câu 119. Ta có } I = \int f(x) dx = \int \frac{1+\ln x}{x \cdot \ln x} dx.$$

$$\text{Đặt } x \ln x = t \Rightarrow (\ln x + 1) dx = dt. \text{ Khi đó ta có } I = \int \frac{1+\ln x}{x \cdot \ln x} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln |x \cdot \ln x| + C.$$

$$\text{Câu 120. Đặt } t = x^3 + 1 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$$

Do đó, ta có  $\int f(x) dx = \int x^2 e^{x^3+1} dx = \int e^t \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} e^t + C = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C$ .

Vậy  $\int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C$ .

**Câu 121.** Đặt  $\sqrt{2x+1} = t \Rightarrow 2x+1 = t^2 \Rightarrow dx = t dt$ .

Khi đó ta có  $\int \frac{1}{2} \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{t dt}{t} = \frac{1}{2} \int dt = \frac{1}{2} t + C = \frac{1}{2} \sqrt{2x+1} + C$ .

**Câu 122.**  $I = \int f(x) dx = \int \tan^5 x dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx$

$= \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x) \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x}{\cos^5 x} dx$

Đặt  $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$   $I = \int \frac{(1-t^2) \cdot (1-t^2)}{t^5} (-dt) = \int \frac{1-2t^2+t^4}{t^5} (-dt)$

$= \int \left( -\frac{1}{t^5} + \frac{2}{t^3} - \frac{1}{t} \right) dt = \int \left( -t^{-5} + 2t^{-3} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{4} t^{-4} - t^{-2} - \ln|t| + C$

$= \frac{1}{4} \cos^4 x - \cos^2 x - \ln|\cos x| + C = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \ln|\cos x| + C$

$= \frac{1}{4} \cdot (\tan^2 x + 1)^2 - (\tan^2 x + 1) - \ln|\cos x| + C$

$= \frac{1}{4} (\tan^4 x + 2 \tan^2 x + 1) - (\tan^2 x + 1) - \ln|\cos x| + C$

$= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\cos x| + \frac{1}{4} + C$

$= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\cos x| + C$ .

**Câu 123.** Đặt  $t = x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow t = \frac{(x + \sqrt{x^2+1})(x - \sqrt{x^2+1})}{x - \sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x - \sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \frac{1}{t} = \sqrt{x^2+1} - x$ .

$t - \frac{1}{t} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right); t + \frac{1}{t} = 2\sqrt{x^2+1}$

$\int f(x) dx = \int \ln(x + \sqrt{x^2+1}) dx = \frac{1}{2} \int \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right) \ln t dt = \frac{1}{2} \int \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right) \ln t dt = I$ .

Đặt  $u = \ln t \rightarrow du = \frac{1}{t} dt$

$dv = \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right) dt \rightarrow v = t - \frac{1}{t};$

$I = \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \ln t - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} \left( t - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \ln t - \frac{1}{2} \int \left( 1 - \frac{1}{t^2} \right) dt = \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \ln t - \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) + C$

$$= x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + C.$$

**Câu 124.** Câu này đề chưa chặt, phải là “Biết một nguyên hàm của hàm số  $y = f(2x)$  là ....”

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = \frac{dx}{2}.$$

$$\int f(2x) dx = \sin^2 x + \ln x + C \Rightarrow \frac{1}{2} \int f(t) dt = \sin^2 \frac{t}{2} + \ln \frac{t}{2} + C \Rightarrow \int f(t) dt = 2 \sin^2 \frac{t}{2} + 2 \ln t - 2 \ln 2 + C$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \ln x + C.$$

**Dạng 3.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện**

**Câu 125.** Đặt  $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$ .

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \sin^3 x \cos x dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

$$F(0) = \pi \Rightarrow \frac{\sin^4 \pi}{4} + C = \pi \Leftrightarrow C = \pi \Rightarrow F(x) = \frac{\sin^4 x}{4} + \pi.$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin^4 \frac{\pi}{2}}{4} = \frac{1}{4} + \pi.$$

**Câu 126.** Ta có  $f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$ .

$$\text{Đặt } t = x(x+1) = x^2 + x \Rightarrow dt = (2x+1) dx.$$

$$\text{Khi đó } F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x(x+1)} + C.$$

$$\text{Mặt khác, } F(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 1.$$

$$\text{Vậy } F(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + 1.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} S &= F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2019) = -\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2019.2020}\right) + 2019 \\ &= -\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}\right) + 2019 = -\left(1 - \frac{1}{2020}\right) + 2019 \\ &= 2018 + \frac{1}{2020} = 2018 \frac{1}{2020}. \end{aligned}$$

**Câu 127.** Đặt  $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$

$$\text{Khi đó } \int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } ab = \frac{1}{8}.$$

**Câu 128.** Đặt  $t = \sqrt{2x-3} \Rightarrow t^2 = 2x-3 \Rightarrow dx = t dt$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \int \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}} dx &= \int \frac{20\left(\frac{t^2+3}{2}\right)^2 - 30\left(\frac{t^2+3}{2}\right) + 7}{t} t dt = \int (5t^4 + 15t^2 + 7) dt = t^5 + 5t^3 + 7t + C \\ &= \sqrt{(2x-3)^5} + 5\sqrt{(2x-3)^3} + 7\sqrt{2x-3} + C = (2x-3)^2 \sqrt{2x-3} + 5(2x-3)\sqrt{2x-3} + 7\sqrt{2x-3} + C \\ &= (4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3} + C \end{aligned}$$

Vậy  $F(x) = (4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3}$ . Suy ra  $S = a + b + c = 3$ .

**Câu 129.** Ta có  $x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1 = [(x^2+3x)+1]^2$ .

Đặt  $t = x^2 + 3x$ , khi đó  $dt = (2x+3) dx$ .

Tích phân ban đầu trở thành  $\int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{1}{t+1} + C$ .

Trở lại biến  $x$ , ta có  $\int \frac{(2x+3) dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{x^2+3x+1} + C$ .

Vậy  $g(x) = x^2 + 3x + 1$ .

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình bằng  $-3$ .

**Câu 130.**  $I = \int \frac{x}{x^4(1+x^2)} dx$

$$t = 1 + x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(t-1)^2 \cdot t} dt = \frac{1}{2} \int \left( \frac{-1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{2} \left( -\ln|t-1| - \frac{1}{t-1} + \ln|t| \right) + C$$

$$= \frac{1}{2} \left( -\ln|x^2| - \frac{1}{x^2} + \ln|1+x^2| \right) + C = -\frac{1}{2x^2} - \ln|x| + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow S = a + b + c = \frac{7}{4}.$$

#### Dạng 4. Nguyên hàm từng phần

##### Dạng 4.1 Tìm nguyên hàm không có điều kiện

##### Câu 131. Chọn D

Ta có  $f(x) = 4x(1 + \ln x) \Rightarrow F(x) = \int (4x(1 + \ln x)) dx$

$$\text{đặt } \begin{cases} u = 1 + \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} \\ dv = 4x \Rightarrow v = 2x^2 \end{cases} \Rightarrow F(x) = 2x^2(1 + \ln x) - \int 2x dx = 2x^2(1 + \ln x) - x^2 + C = 2x^2 \ln x + x^2 + C$$

Câu 132. Đặt  $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$ .

Suy ra  $\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$ .

##### Câu 133.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int x.e^{2x} dx = \frac{1}{2} x.e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx$$

$$\Rightarrow \int x.e^{2x} dx = \frac{1}{2} x.e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C = \frac{1}{2} e^{2x} \left( x - \frac{1}{2} \right) + C$$

Câu 134. Gọi  $I = \int (2x-1)e^x dx$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x-1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = (2x-1)e^x - 2 \int e^x dx = (2x-1)e^x - 2e^x + C = (2x-3)e^x + C.$$

**Câu 135.** Ta có  $F(x) = \int xe^{2x} dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } F(x) = \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C = \frac{1}{2} e^{2x} \left( x - \frac{1}{2} \right) + C$$

**Câu 136.** Ta có:  $\int f(x) dx = \int x(1 + \sin x) dx = \int x dx + \int x \sin x dx = \int x dx - \int x d(\cos x)$

$$= \frac{x^2}{2} - \left( x \cos x - \int \cos x dx \right) = \frac{x^2}{2} - x \cos x + \sin x + C.$$

**Câu 137.** Ta có  $\int 2x(1 + e^x) dx = 2 \int x dx + 2 \int x e^x dx.$

$$\text{Gọi } I = 2 \int x \ln x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = 2xe^x - 2 \int e^x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \int 2x(1 + e^x) dx &= 2 \int x dx + xe^x - 2 \int e^x dx = x^2 + xe^x - 2x + C \\ &= (2x - 2)e^x + x^2 + C. \end{aligned}$$

**Câu 138.** Ta có  $F(x) = \int f(x) dx = \int x \ln x dx.$  Đặt  $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$

Theo công thức tích nguyên hàm từng phần, ta có:

$$F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

**Câu 139. Chọn C**

$$\text{Ta có } I = \int (3x^2 + 1) \ln x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = (3x^2 + 1) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \int (3x^2 + 1) dx = x^3 + x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = (x^3 + x) \ln x - \int (x^3 + x) \frac{1}{x} dx = x(x^2 + 1) \ln x - \int (x^2 + 1) dx = x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C.$$

**Câu 140. Chọn A**

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } F(x) = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx = -x \cdot \cot x + \int \cot x dx = -x \cdot \cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = -x \cdot \cot x + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$$

$$= -x \cdot \cot x + \ln|\sin x| + C. \text{ Với } x \in (0; \pi) \Rightarrow \sin x > 0 \Rightarrow \ln|\sin x| = \ln(\sin x).$$

$$\text{Vậy } F(x) = -x \cot x + \ln(\sin x) + C.$$

**Câu 141. Chọn A**

$$\text{Ta có: } \int 3x(x + \cos x) dx = \int 3x^2 dx + \int 3x \cos x dx$$

$$\bullet \int 3x^2 dx = x^3 + C_1$$

$$\bullet \int 3x \cos x dx = \int 3x \cdot d(\sin x) = 3x \cdot \sin x - \int 3 \sin x dx = 3x \cdot \sin x + 3 \cos x + C_2$$

$$\text{Vậy } \int 3x(x + \cos x) dx = x^3 + 3(x \sin x + \cos x) + C$$

$$\text{Câu 142. Ta có: } \int (x^4 + xe^x) dx = \int x^4 dx + \int xe^x dx.$$

$$+) \int x^4 dx = \frac{1}{5} x^5 + C_1.$$

$$+) \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra: } \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C_2 = (x-1)e^x + C_2.$$

$$\text{Vậy } \int (x^4 + xe^x) dx = \frac{1}{5} x^5 + (x-1)e^x + C.$$

**Câu 143. Chọn C**

Ta có

$$F(x) \cdot G(x) = \int (F(x) \cdot G(x))' dx = \int (F'(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot G'(x)) dx.$$

$$\Rightarrow \int (F'(x) \cdot G(x)) dx = F(x) \cdot G(x) - \int (F(x) \cdot G'(x)) dx$$

$$= x^2 \ln(x^2 + 1) - \int \left( \frac{2x^3}{x^2 + 1} \right) dx = x^2 \ln(x^2 + 1) - (x^2 + 1) + \ln(x^2 + 1) + C$$

$$= (x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - x^2 + C.$$

**Câu 33.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x.e^{2x}$  là

A.  $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$       B.  $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}(x - 2) + C.$

C.  $F(x) = 2e^{2x}(x - 2) + C.$       D.  $F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$  Đặt  $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}.$

$$F(x) = x.e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}x.e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$$

**Câu 144.** Sử dụng công thức:  $\int u dv = u.v - \int v du.$

Ta có:  $\int x e^x dx = \int x d(e^x) = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$

**Câu 145.** Ta có:

$$\int f(x)G(x)dx = \int G(x)d(F(x))$$

$$= G(x).F(x) - \int F(x)d(G(x)) = G(x).F(x) - \int F(x)g(x)dx.$$

$$\Leftrightarrow \int f(x)G(x)dx = x^2 \ln(x^2 + 1) - \int \frac{2x^3}{x^2 + 1} dx = x^2 \ln(x^2 + 1) - \int \left(2x - \frac{2x}{x^2 + 1}\right) dx =$$

$$x^2 \ln(x^2 + 1) - x^2 + \int \frac{1}{x^2 + 1} d(x^2 + 1) = x^2 \ln(x^2 + 1) - x^2 + \ln(x^2 + 1) + C = (x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - x^2 + C.$$

**Câu 146.**

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $F'(x) = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{(x^2 + 1)^2}{x^2}.$

Do  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \frac{(x^2 + a)^2}{x^2}$  nên  $a = 1.$

$$\int g(x)dx = \int x \cos x dx$$

Đặt  $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$



$$\int g(x)dx = \int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

**Câu 147.** Ta có:  $\int \frac{(2x^2 + x) \ln x + 1}{x} dx = \int (2x+1) \ln x dx + \int \frac{1}{x} dx = I_1 + I_2 .$

$$I_1 = \int (2x+1) \ln x dx . \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = (2x+1) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x^2 + x \end{cases} .$$

$$\begin{aligned} I_1 &= (x^2 + x) \ln x - \int (x^2 + x) \frac{1}{x} dx = (x^2 + x) \ln x - \int (x+1) dx \\ &= (x^2 + x) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C_1 . \end{aligned}$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C_2 .$$

$$\begin{aligned} \int \frac{(2x^2 + x) \ln x + 1}{x} dx &= I_1 + I_2 \\ &= (x^2 + x) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C_1 + \ln x + C_2 = (x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C . \end{aligned}$$

#### Dạng 4.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện

##### Câu 148. Chọn C

Ta có:  $\int \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2x^2} .$  Chọn  $f(x) = \frac{-1}{x^2} .$

$$\text{Suy ra } \int f'(x) \ln x dx = \int \frac{2}{x^3} \ln x dx . \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{2}{x^3} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{-1}{x^2} \end{cases} .$$

$$\text{Khi đó: } \int f'(x) \ln x dx = \int \frac{\ln x}{x^3} dx = -\frac{\ln x}{x^2} + \int \frac{1}{x^3} dx = -\left( \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} \right) + C .$$

##### Câu 149. Chọn C

$$\text{Ta có } F'(x) = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow f(x) = x.F'(x) = x \cdot \left( -\frac{1}{3} x^{-3} \right)' = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -3x^{-4} \Rightarrow f'(x) \ln x = -3x^{-4} \ln x$$

$$\text{Vậy } \int f'(x) \ln x dx = \int (-3x^{-4} \ln x) dx = -3 \int \ln x \cdot x^{-4} dx$$

$$\text{Đặt } u = \ln x; dv = x^{-4} dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x}; v = \frac{x^{-3}}{-3}$$

$$\text{Nên } \int f'(x) \ln x dx = -3 \int \ln x \cdot x^{-4} dx = -3 \left( \frac{\ln x}{-3x^3} + \int \frac{x^{-4}}{3} dx \right) = \frac{\ln x}{x^3} - \int x^{-4} dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$$

**Câu 150.** Chọn D

$$\text{Theo đề bài ta có } \int f(x) \cdot e^{2x} dx = (x-1)e^x + C, \text{ suy ra } f(x) \cdot e^{2x} = [(x-1)e^x]' = e^x + (x-1) \cdot e^x$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{-x} + (x-1) \cdot e^{-x} = x \cdot e^{-x} \Rightarrow f'(x) = (1-x) \cdot e^{-x}$$

$$\text{Suy ra } K = \int f'(x) e^{2x} dx = \int (1-x) e^x dx = \int (1-x) d(e^x) = e^x(1-x) + \int e^x dx = (2-x)e^x + C.$$

**Câu 151.** Ta có:

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int x \cdot e^x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \rightarrow f(x) = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

$$\text{Theo đề: } f(0) = 2 \Leftrightarrow 2 = -1 + C \Leftrightarrow C = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = x \cdot e^x - e^x + 3$$

$$\Rightarrow f(1) = 3.$$

**Câu 152.** Chọn D

$$\text{Ta có } f(x) + f'(x) = e^{-x} \Leftrightarrow f(x)e^x + f'(x)e^x = 1 \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = 1 \Leftrightarrow f(x)e^x = x + C_1.$$

$$\text{Vì } f(0) = 2 \Rightarrow C_1 = 2 \Rightarrow f(x)e^{2x} = (x+2)e^x \Rightarrow \int f(x)e^{2x} dx = \int (x+2)e^x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int f(x)e^{2x} dx = \int (x+2)e^x dx = (x+2)e^x - \int e^x dx = (x+2)e^x - e^x + C = (x+1)e^x + C.$$

**Câu 153.** Theo đề:  $f'(x) = (x+1)e^x$ . Nguyên hàm 2 vế ta được

$$\int f'(x) dx = \int (x+1)e^x dx \Leftrightarrow f(x) = (x+1)e^x - \int e^x dx$$

$$\Rightarrow f(x) = (x+1)e^x - e^x + C = xe^x + C$$

$$\text{Mà } f(0) = 0 \Rightarrow 0 \cdot e^0 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = xe^x.$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

$$\text{Suy ra } a = 1; b = -1 \Rightarrow a + b = 0.$$

**Câu 154.** Đặt  $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$ .

Do đó  $\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C = F(x; C)$ .

$F(0) = 1 \Leftrightarrow -e^0 + C = 1 \Leftrightarrow C = 2$ . Vậy  $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 2$ .

**Câu 155.** Đặt  $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$

Khi đó  $\int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}$ .

Vậy  $ab = \frac{1}{8}$ .

**Câu 156.** Tính  $\int \frac{\ln(x+3)}{x^2} dx$ .

Đặt  $\begin{cases} u = \ln(x+3) \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+3} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$

Ta có  $\int \frac{\ln(x+3)}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln(x+3) + \int \frac{dx}{x(x+3)} = -\frac{1}{x} \ln(x+3) + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C = F(x, C)$ .

Lại có  $F(-2) + F(1) = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{1}{3} \ln 2 + C \right) + \left( -\ln 4 + \frac{1}{3} \ln \frac{1}{4} + C \right) = 0 \Leftrightarrow 2C = \frac{7}{3} \ln 2$ .

Suy ra  $F(-1) + F(2) = \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{1}{3} \ln \frac{2}{5} + 2C = \frac{10}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5$ .

**Câu 157.** Đặt  $\begin{cases} u = \ln(x-1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x-1} \\ v = x-1 \end{cases}$

$g(x) = \int \ln(x-1) dx = (x-1) \ln(x-1) - \int \frac{x-1}{x-1} dx = (x-1) \ln(x-1) - x + C$

Do  $g(2) = 1 \Leftrightarrow 1 \ln 1 - 2 + C = 1 \Leftrightarrow C = 3 \Rightarrow g(x) = (x-1) \ln(x-1) - x + 3$

Suy ra:  $g(3) = 2 \ln 2 - 3 + 3 = 2 \ln 2 = \ln 4 \Rightarrow a = 1, b = 4 \Rightarrow 3a^2 - b^2 = -13$

$$\text{Ta có } f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2 \Rightarrow -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = -4x^3 \Rightarrow \left[ \frac{1}{f(x)} \right]' = -4x^3 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -x^4 + C$$

$$\text{Do } f(2) = -\frac{1}{25}, \text{ nên ta có } C = -9. \text{ Do đó } f(x) = -\frac{1}{x^4 + 9} \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{10}.$$

**Câu 159.** Ta có  $y' = xy^2 \Rightarrow \frac{y'}{y} = x^2 \Rightarrow \int \frac{y'}{y} dx = \int x^2 dx \Leftrightarrow \ln y = \frac{x^3}{3} + C \Leftrightarrow y = e^{\frac{x^3}{3} + C}$ .

Theo giả thiết  $f(-1) = 1$  nên  $e^{\frac{-1}{3} + C} = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{3}$ .

Vậy  $y = f(x) = e^{\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}}$ . Do đó  $f(2) = e^3$ .

**Câu 160.**  $f'(x) = (2x+1)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+1 \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+1) dx$

$$\Rightarrow \int \frac{d(f(x))}{f^2(x)} = \int (2x+1) dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + x + C \quad (1) \text{ (Với } C \text{ là hằng số thực).}$$

Thay  $x=1$  vào (1) được  $2+C = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow C = 0$ . Vậy  $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$ .

$$T = f(1) + f(2) + \dots + f(2019) = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{1} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \dots + \left( \frac{1}{2020} - \frac{1}{2019} \right) = -1 + \frac{1}{2020}.$$

Suy ra:  $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2020 \end{cases} \Rightarrow a - b = -2019$  (Chọn đáp số sai).

Trên khoảng  $(0; +\infty)$  ta có:  $2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}f'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}x^2$ .

$$\Rightarrow (\sqrt{x} \cdot f(x))' = \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow \int (\sqrt{x} \cdot f(x))' dx = \int \frac{3}{2}x^2 dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \cdot f(x) = \frac{1}{2}x^3 + C. (*)$$

Mà  $f(1) = \frac{1}{2}$  nên từ (\*) có:  $\sqrt{1} \cdot f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^3 + C \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 \sqrt{x}}{2}$ .

Vậy  $f(4) = \frac{4^2 \sqrt{4}}{2} = 16$ .

**Câu 162.** Ta có:  $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx \Leftrightarrow \ln(f(x)) = 2\sqrt{x+1} + C$

Mà  $f(0) = 1$  nên  $C = -2 \Rightarrow f(x) = e^{2\sqrt{x+1}-2} \Rightarrow f(3) = e^2 > 6$

**Câu 163.** Ta có:  $f'(x) > 0, \forall x \in [2; 4]$  nên hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên  $[2; 4] \Rightarrow f(x) \geq f(2)$  mà  $f(2) = \frac{7}{4}$ . Do đó:  $f(x) > 0, \forall x \in [2; 4]$ .

Từ giả thiết ta có:  $4x^3 f(x) = [f'(x)]^3 - x^3 \Leftrightarrow x^3 [4f(x) + 1] = [f'(x)]^3$

$\Leftrightarrow x \cdot \sqrt[3]{4f(x) + 1} = f'(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x) + 1}} = x$ .

Suy ra:  $\int \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x) + 1}} dx = \int x dx \Leftrightarrow \frac{1}{4} \int \frac{d[4f(x) + 1]}{\sqrt[3]{4f(x) + 1}} = \frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow \frac{3}{8} \sqrt[3]{[4f(x) + 1]^2} = \frac{x^2}{2} + C$ .

$f(2) = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = 2 + C \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}$ .

Vậy:  $f(x) = \frac{\sqrt{\left[\frac{4}{3}(x^2 - 1)\right]^3 - 1}}{4} \Rightarrow f(4) = \frac{40\sqrt{5} - 1}{4}$ .

**Câu 164.**  $f(x) + f'(x) = x$  (1).

Nhân 2 vế của (1) với  $e^x$  ta được  $e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) = x \cdot e^x$ .

Hay  $[e^x \cdot f(x)]' = x \cdot e^x \Rightarrow e^x \cdot f(x) = \int x \cdot e^x dx$ .

Xét  $I = \int x \cdot e^x dx$ .

Đặt  $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{cases}$

$I = \int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$ . Suy ra  $e^x f(x) = x \cdot e^x - e^x + C$ .

Theo giả thiết  $f(0) = 1$  nên  $C = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x \cdot e^x - e^x + 2}{e^x} \Rightarrow f(1) = \frac{2}{e}$ .

**Câu 165.** Ta có:  $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x) \cdot f''(x)]; x > 0$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot [f'(x)]^2 + 1 = x^2 [1 - f(x) \cdot f''(x)]$$

$$\Leftrightarrow [f'(x)]^2 + \frac{1}{x^2} = 1 - f(x) \cdot f''(x)$$

$$\Leftrightarrow [f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow [f(x) \cdot f'(x)]' = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Do đó: } \int [f(x) \cdot f'(x)]' \cdot dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx \Rightarrow f(x) \cdot f'(x) = x + \frac{1}{x} + c_1.$$

$$\text{Vì } f(1) = f'(1) = 1 \Rightarrow 1 = 2 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -1.$$

$$\text{Nên } \int f(x) \cdot f'(x) \cdot dx = \int \left(x + \frac{1}{x} - 1\right) dx \Leftrightarrow \int f(x) \cdot d(f(x)) = \int \left(x + \frac{1}{x} - 1\right) dx$$

$$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x - x + c_2. \text{ Vì } f(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 1.$$

$$\text{Vậy } \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x - x + 1 \Rightarrow f^2(2) = 2 \ln 2 + 2.$$

**Câu 166.** Có  $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x \Leftrightarrow (f(x) \cdot f'(x))' = x^3 - 2x$

$$\Leftrightarrow f(x) \cdot f'(x) = \int (x^3 - 2x) dx = \frac{1}{4} x^4 - x^2 + C$$

$$\text{Từ } f(0) = f'(0) = 1. \text{ Suy ra } C = 1. \text{ Vậy } f(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{4} x^4 - x^2 + 1$$

$$\text{Tiếp, có } 2f(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{2} x^4 - 2x^2 + 2 \Leftrightarrow (f^2(x))' = \frac{1}{2} x^4 - 2x^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = \int \left(\frac{1}{2} x^4 - 2x^2 + 2\right) dx = \frac{1}{10} x^5 - \frac{2}{3} x^3 + 2x + C$$

$$\text{Từ } f(0) = 1. \text{ Suy ra } C = 1. \text{ Vậy } f^2(x) = \frac{1}{10} x^5 - \frac{2}{3} x^3 + 2x + 1.$$

$$\text{Do đó } T = \frac{43}{15}$$

**Câu 167. Chọn D**

$$f(x) + \tan x \cdot f'(x) = \frac{x}{\cos^3 x} \Leftrightarrow \cos x \cdot f(x) + \sin x \cdot f'(x) = \frac{x}{\cos^2 x}.$$

$$\Leftrightarrow [\sin x \cdot f(x)]' = \frac{x}{\cos^2 x}.$$

$$\text{Do đó } \int [\sin x \cdot f(x)]' dx = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx \Rightarrow \sin x \cdot f(x) = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{Tính } I = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}. \text{ Khi đó}$$

$$I = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} dx = x \tan x + \ln |\cos x|.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \frac{x \cdot \tan x + \ln |\cos x|}{\sin x} = \frac{x}{\cos x} + \frac{\ln |\cos x|}{\sin x}.$$

$$a\pi\sqrt{3} + b \ln 3 = \sqrt{3} f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \left( \frac{2\pi}{3} - \frac{2 \ln 2}{\sqrt{3}} \right) - \left( \frac{\pi\sqrt{3}}{9} + 2 \ln \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= \frac{5\pi\sqrt{3}}{9} - \ln 3. \text{ Suy ra } \begin{cases} a = \frac{5}{9} \\ b = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } P = a + b = -\frac{4}{9}.$$

**Câu 168. Chọn E không có đáp án đúng**

$$\text{Xét } f'(x) + (2x+4)f^2(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-f'(x)}{f^2(x)} = 2x+4 \Rightarrow \int \frac{-f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+4) dx.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = x^2 + 4x + C.$$

$$\text{Vì } f(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow C = 3 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right).$$

$$\text{Vậy } S = [f(0) + f(2) + \dots + f(2018)] + [f(1) + f(3) + \dots + f(2017)]$$

$$S = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2021} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2020} \right]$$

$$S = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{2020}{2021} + \frac{1009}{2 \cdot 2020} \right].$$

**Câu 169.** Chọn A

Ta có với  $\forall x \in (0; +\infty)$  thì  $y = f(x) > 0$ ;  $x+1 > 0$ .

Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$  nên  $f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ .

$$\text{Do đó } [f'(x)]^2 = (x+1)f(x) \Leftrightarrow f'(x) = \sqrt{(x+1)f(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{(x+1)}.$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = \int \sqrt{(x+1)} dx \Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{3} \sqrt{(x+1)^3} + C.$$

$$\text{Vì } f(3) = \frac{4}{9} \text{ nên } C = \frac{2}{3} - \frac{8}{3} = -2.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \left( \frac{1}{3} \sqrt{(x+1)^3} - 2 \right)^2, \text{ suy ra } f(8) = 49.$$

**Câu 170.** Chọn D

$$\text{Từ giả thiết ta có: } f'(x) = [f(x)]^2 \cdot \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} > 0 \text{ với mọi } x \in (1; 2].$$

Do đó  $f(x) \geq f(1) = 1 > 0$  với mọi  $x \in [1; 2]$ .

Xét với mọi  $x \in [1; 2]$  ta có:

$$(x^2 + 1)f'(x) = [f(x)]^2 (x^2 - 1) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} dx \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{x + \frac{1}{x}} + C.$$

$$\text{Mà } f(1) = 1 \Rightarrow 1 = 1 + C \Leftrightarrow C = 0. \text{ Vậy } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} \Rightarrow f(2) = \frac{5}{2}.$$

**Câu 171.** TH1:  $f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$  trái giả thiết.



$$\text{TH2: } f(x) \neq 0 \Rightarrow f'(x) = -(2x+1) \cdot f^2(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -(2x+1) \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = -\int (2x+1) dx$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{f(x)} = -(x^2 + x + C).$$

$$\text{Ta có: } f(2) = \frac{1}{6} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots - \frac{1}{2020} = \frac{2019}{2020}.$$

**Câu 172.** Ta có:  $(f(x))^2 \cdot f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$  (\*)

Lấy nguyên hàm 2 vế của phương trình trên ta được

$$\int (f(x))^2 \cdot f'(x) dx = \int (3x^2 + 4x + 2) dx \Leftrightarrow \int (f(x))^2 d(f(x)) = x^3 + 2x^2 + 2x + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{(f(x))^3}{3} = x^3 + 2x^2 + 2x + C \Leftrightarrow (f(x))^3 = 3(x^3 + 2x^2 + 2x + C) \quad (1)$$

Theo đề bài  $f(0) = 3$  nên từ (1) ta có  $(f(0))^3 = 3(0^3 + 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + C) \Leftrightarrow 27 = 3C \Leftrightarrow C = 9$

$$\Rightarrow (f(x))^3 = 3(x^3 + 2x^2 + 2x + 9) \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{3(x^3 + 2x^2 + 2x + 9)}.$$

Tiếp theo chúng ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-2; 1]$ .

**CÁCH 1:**

Vì  $x^3 + 2x^2 + 2x + 9 = x^2(x+2) + 2(x+2) + 5 > 0, \forall x \in [-2; 1]$  nên  $f(x)$  có đạo hàm trên  $[-2; 1]$  và

$$f'(x) = \frac{3(3x^2 + 4x + 2)}{3\sqrt[3]{[3(x^3 + 2x^2 + 2x + 9)]^2}} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{\sqrt[3]{[3(x^3 + 2x^2 + 2x + 9)]^2}} > 0, \forall x \in [-2; 1].$$

$\Rightarrow$  Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên  $[-2; 1] \Rightarrow \max_{[-2; 1]} f(x) = f(1) = \sqrt[3]{42}$ .

Vậy  $\max_{[-2; 1]} f(x) = f(1) = \sqrt[3]{42}$ .

**CÁCH 2:**

$$f(x) = \sqrt[3]{3(x^3 + 2x^2 + 2x + 9)} = \sqrt[3]{3\left(x + \frac{2}{3}\right)^3 + 2\left(x + \frac{2}{3}\right) + \frac{223}{9}}.$$

Vì các hàm số  $y = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^3$ ,  $y = 2\left(x + \frac{2}{3}\right) + \frac{223}{9}$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$  nên hàm số

$y = \sqrt[3]{3\left(x + \frac{2}{3}\right)^3 + 2\left(x + \frac{2}{3}\right) + \frac{223}{9}}$  cũng đồng biến trên  $\mathbb{R}$ . Do đó, hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên  $[-2; 1]$ .

Vậy  $\max_{[-2; 1]} f(x) = f(1) = \sqrt[3]{42}$ .

**Câu 173.**  $f(x) - xf'(x) = -2x^3 - 3x^2 \Leftrightarrow \frac{1 \cdot f(x) - x \cdot f'(x)}{x^2} = \frac{-2x^3 - 3x^2}{x^2} \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x}\right]' = 2x + 3$

Suy ra,  $\frac{f(x)}{x}$  là một nguyên hàm của hàm số  $g(x) = 2x + 3$ .

Ta có  $\int (2x + 3)dx = x^2 + 3x + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

Do đó,  $\frac{f(x)}{x} = x^2 + 3x + C_1$ , (1) với  $C_1 \in \mathbb{R}$  nào đó.

Vì  $f(1) = 4$  theo giả thiết, nên thay  $x = 1$  vào hai vế của (1) ta thu được  $C_1 = 0$ , từ đó  $f(x) = x^3 + 3x^2$ . Vậy  $f(2) = 20$ .

**Câu 174.** Ta có  $f(x) \cdot f'(x) = (2x + 1)\sqrt{1 + f^2(x)} \Leftrightarrow \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1 + f^2(x)}} = (2x + 1)$ .

Suy ra  $\int \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1 + f^2(x)}} dx = \int (2x + 1)dx \Leftrightarrow \int \frac{d(1 + f^2(x))}{2\sqrt{1 + f^2(x)}} = \int (2x + 1)dx \Leftrightarrow \sqrt{1 + f^2(x)} = x^2 + x + C$ .

Theo giả thiết  $f(0) = 2\sqrt{2}$ , suy ra  $\sqrt{1 + (2\sqrt{2})^2} = C \Leftrightarrow C = 3$ .

Với  $C = 3$  thì  $\sqrt{1 + f^2(x)} = x^2 + x + 3 \Rightarrow f(x) = \sqrt{(x^2 + x + 3)^2 - 1}$ . Vậy  $f(1) = \sqrt{24}$ .

**Câu 175.** Ta có  $[f(x)f'(x)]' = [f'(x)]^2 + f(x)f''(x)$ .

Do đó theo giả thiết ta được  $[f(x)f'(x)]' = 2x^2 - x + 1$ .

Suy ra  $f(x)f'(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + C$ . Hơn nữa  $f(0) = f'(0) = 3$  suy ra  $C = 9$ .

Tương tự vì  $[f^2(x)]' = 2f(x)f'(x)$  nên  $[f^2(x)]' = 2\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + 9\right)$ . Suy ra

$f^2(x) = \int 2\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + 9\right)dx = \frac{1}{3}x^4 - \frac{x^3}{3} + x^2 + 18x + C$ , cũng vì  $f(0) = 3$  suy ra

$$f^2(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{x^3}{3} + x^2 + 18x + 9. \text{ Do đó } [f(1)]^2 = 28.$$

**Câu 176.** Ta có

$$\begin{aligned} (x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x &\Leftrightarrow (x+1)f(x) + f(x) + (x+1)f'(x) = e^x \\ &\Leftrightarrow [(x+1)f(x)] + [(x+1)f(x)]' = e^x \Leftrightarrow e^x [(x+1)f(x)] + e^x [(x+1)f(x)]' = e^{2x} \\ &\Leftrightarrow [e^x(x+1)f(x)]' = e^{2x} \Rightarrow \int [e^x(x+1)f(x)]' dx = \int e^{2x} dx \Leftrightarrow e^x(x+1)f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C \end{aligned}$$

$$\text{Mà } f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 0. \text{ Vậy } f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{x+1}$$

$$\text{Khi đó } f(2) = \frac{e^2}{6}.$$

$$\text{Câu 177. Từ giả thiết, ta có } x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \cdot f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2} f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{x}{x+1} \cdot f(x) \right]' = \frac{x}{x+1}, \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{x}{x+1} \cdot f(x) = \int \frac{x}{x+1} dx \text{ hay } \frac{x}{x+1} \cdot f(x) = x - \ln|x+1| + C.$$

$$\text{Mặt khác, ta có } f(1) = -2 \ln 2 \text{ nên } C = -1. \text{ Do đó } \frac{x}{x+1} \cdot f(x) = x - \ln|x+1| - 1.$$

$$\text{Với } x = 2 \text{ thì } \frac{2}{3} \cdot f(2) = 1 - \ln 3 \Leftrightarrow f(2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \ln 3. \text{ Suy ra } a = \frac{3}{2} \text{ và } b = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 = \frac{9}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Câu 178. Ta có } f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1} &\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \\ &\Leftrightarrow \int \frac{d(f(x))}{f(x)} = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} + C \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3} \sqrt{3x+1} + C} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } f(1) = 1 \text{ nên } e^{\frac{4}{3} + C} = 1 \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3}. \text{ Suy ra } f(5) = e^{\frac{4}{3}} \approx 3,794.$$

$$\text{Câu 179. Từ } f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1} \text{ ta có } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}.$$

$$\text{Suy ra: } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Rightarrow \ln f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} + C.$$

$$\text{Ta có } \ln f(1) = \frac{2}{3} \sqrt{3 \cdot 1 + 1} + C \Leftrightarrow \ln 1 = \frac{4}{3} + C \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3}.$$

$$\text{Nên } \ln f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} - \frac{4}{3} \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3} \sqrt{3x+1} - \frac{4}{3}}.$$

$$\text{Vậy } f(5) = e^{\frac{2}{3} \sqrt{3 \cdot 5 + 1} - \frac{4}{3}} = e^{\frac{4}{3}} \in (3; 4).$$

**Câu 180.** Ta có  $f'(x) = (2x+3)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+3$

$$\Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int (2x+3) dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + 3x + C.$$

$$\text{Vi } f(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 2.$$

$$\text{Vậy } f(x) = -\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{Do đó } f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{1}{2020} - \frac{1}{2} = -\frac{1009}{2020}.$$

$$\text{Vậy } a = -1009; b = 2020. \text{ Do đó } b - a = 3029.$$

**Câu 181.**  $f'(x) = \frac{3x^4 + x^2 - 1}{x^2} f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{3x^4 + x^2 - 1}{x^2}.$

$$\int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int \frac{3x^4 + x^2 - 1}{x^2} dx \Leftrightarrow \int \frac{d(f(x))}{f^2(x)} = \int \frac{3x^4 + x^2 - 1}{x^2} dx. \Leftrightarrow \int \frac{d(f(x))}{f^2(x)} = \int \left( 3x^2 + 1 - \frac{1}{x^2} \right) dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{-1}{f(x)} = x^3 + x + \frac{1}{x} + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{-1}{x^3 + x + \frac{1}{x}} + C.$$

$$\text{Do } f(1) = -\frac{1}{3} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{-x}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{x^2 - x + 1} \right).$$

$$f(1) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{1} \right); f(2) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{7} - \frac{1}{3} \right); f(3) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{13} - \frac{1}{7} \right); \dots; f(80) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{6481} - \frac{1}{6321} \right).$$

$$f(1) + f(2) + \dots + f(80) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6481} = -\frac{3240}{6481}.$$

**Câu 182.** Theo đề bài, ta có  $[f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0 \Rightarrow \frac{f(x) \cdot f''(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = 1$

$$\Rightarrow \left[ \frac{f'(x)}{f(x)} \right]' = 1 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x + C \Rightarrow \ln f(x) = \frac{x^2}{2} + Cx + D$$

Mà  $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(2) = e^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2 \\ D = 0 \end{cases}$ . Suy ra :  $f(x) = e^{\frac{x^2}{2} + 2x} \Rightarrow f(1) = e^{\frac{5}{2}}$ .

**Dạng 6. Một số bài toán khác liên quan đến nguyên hàm**

**Câu 183.** Ta có  $f(x) = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C = \begin{cases} \ln(x-1) + C_1 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(1-x) + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ .

Lại có  $f(0) = 2017 \Rightarrow \ln(1-0) + C_2 = 2017 \Rightarrow C_2 = 2017$ .

$f(2) = 2018 \ln(2-1) + C_1 = 2018 \Rightarrow C_1 = 2018$ .

Do đó  $S = [\ln(3-1) + 2018 - 2018][\ln(1-(-1)) + 2017 - 2017] = \ln^2 2$ .

**Câu 184.** Ta có  $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x(\ln x - 1)} dx = \int \frac{1}{\ln x - 1} d(\ln x) = \ln|\ln x - 1| + C$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln|\ln x - 1| + C_1 & \text{khi } 0 < x < e \\ \ln|\ln x - 1| + C_2 & \text{khi } x > e \end{cases}$$

Do  $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln 6 \Rightarrow \ln\left|\ln \frac{1}{e^2} - 1\right| + C_1 = \ln 6 \Leftrightarrow \ln 3 + C_1 = \ln 6 \Leftrightarrow C_1 = \ln 2$

Đồng thời  $f(e^2) = 3 \Rightarrow \ln|\ln e^2 - 1| + C_2 = 3 \Leftrightarrow C_2 = 3$

Khi đó:  $f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e^3) = \ln\left|\ln \frac{1}{e} - 1\right| + \ln 2 + \ln|\ln e^3 - 1| + 3 = 3(\ln 2 + 1)$ .

**Câu 185.**  $f(x) = \int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx = \begin{cases} \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_1, \forall x \in (-\infty; -2) \\ \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_2, \forall x \in (-2; 1) \\ \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_3, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases}$

Ta có  $f(-3) = \frac{1}{3} \ln 4 + C_1, \forall x \in (-\infty; -2), f(0) = \frac{1}{3} \ln \frac{1}{2} + C_2, \forall x \in (-2; 1),$

$f(3) = \frac{1}{3} \ln \frac{2}{5} + C_3, \forall x \in (1; +\infty),$

Theo giả thiết ta có  $f(0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow C_2 = \frac{1}{3}(1 + \ln 2)$ .

$\Rightarrow f(-1) = \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}$ .

Và  $f(-3) - f(3) = 0 \Leftrightarrow C_1 - C_3 = \frac{1}{3} \ln \frac{1}{10}$ .

Vậy  $f(-4) + f(-1) - f(4) = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{2} + C_1 + \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 2 - C_2 = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}$ .

**Câu 186.** Ta có  $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{2}{x^2 - 1} dx = \int \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \begin{cases} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_1 & \text{khi } x < -1 \\ \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_2 & \text{khi } -1 < x < 1. \\ \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_3 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

Khi đó  $\begin{cases} f(-2) + f(2) = 0 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln 3 + C_1 + \ln \frac{1}{3} + C_3 = 0 \\ \ln 3 + C_2 + \ln \frac{1}{3} + C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}$

Do đó  $f(-3) + f(0) + f(4) = \ln 2 + C_1 + C_2 + \ln \frac{3}{5} + C_3 = \ln \frac{6}{5} + 1$ .

**Câu 187.** Ta có  $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x(\ln x - 1)} dx = \int \frac{1}{\ln x - 1} d(\ln x) = \ln |\ln x - 1| + C$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln |\ln x - 1| + C_1 & \text{khi } 0 < x < e \\ \ln |\ln x - 1| + C_2 & \text{khi } x > e \end{cases}$

Do  $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln 6 \Rightarrow \ln \left| \ln \frac{1}{e^2} - 1 \right| + C_1 = \ln 6 \Leftrightarrow \ln 3 + C_1 = \ln 6 \Leftrightarrow C_1 = \ln 2$

Đồng thời  $f(e^2) = 3 \Rightarrow \ln |\ln e^2 - 1| + C_2 = 3 \Leftrightarrow C_2 = 3$

Khi đó:  $f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e^3) = \ln \left| \ln \frac{1}{e} - 1 \right| + \ln 2 + \ln |\ln e^3 - 1| + 3 = 3(\ln 2 + 1)$ .

**Câu 188.** Ta có  $F'(x) = f(x)$ .

Tính  $F'(x) = (2ax + b)\sqrt{2x-3} + (ax^2 + bx + c) \cdot \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$   
 $= \frac{(2ax + b)(2x-3) + ax^2 + bx + c}{\sqrt{2x-3}} = \frac{5ax^2 + (3b-6a)x - 3b + c}{\sqrt{2x-3}}$

Do đó  $\frac{5ax^2 + (3b-6a)x - 3b + c}{\sqrt{2x-3}} = \frac{20x^2 - 30x + 11}{\sqrt{2x-3}}$

$\Rightarrow 5ax^2 + (3b-6a)x - 3b + c = 20x^2 - 30x + 11$

$\Rightarrow \begin{cases} 5a = 20 \\ 3b - 6a = -30 \\ -3b + c = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow T = 7$ .

**Câu 189.** Ta có  $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow (ax^2 + bx + c + 2ax + b) \cdot e^x = (x-1)^2 \cdot e^x \forall x \in \mathbb{R}$ .

Đồng nhất hệ số hai vế ta có: 
$$\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=-2 \\ c+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=5 \end{cases}$$
. Từ đó  $S = a + 2b + c = 1 - 8 + 5 = -2$ .

**Câu 190.** Ta có  $f(x) = \left(\int f(x) dx\right)' \Rightarrow 2x^2 e^{x^3+2} + 2xe^{2x} = (me^{x^3+2} + nxe^{2x} - pe^{2x} + C)'$

$$\Leftrightarrow 2x^2 e^{x^3+2} + 2xe^{2x} = 3mx^2 e^{x^3+2} + ne^{2x} + 2nxe^{2x} - 2pe^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 e^{x^3+2} + 2xe^{2x} = 3mx^2 e^{x^3+2} + (n-2p)e^{2x} + 2nxe^{2x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3m=2 \\ 2n=2 \\ n-2p=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\frac{2}{3} \\ n=1 \\ p=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow m+n+p = \frac{13}{6}.$$

**Câu 191.** Vì  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  nên  $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 3mx^2 + 2(3m+n)x - 4 = 3x^2 + 10x - 4, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m=3 \\ 2(3m+n)=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=2 \end{cases}.$$

Vậy  $m.n = 2$ .

**Câu 192.** Vì  $F(x)$  là nguyên hàm của  $f(x)$  nên

$$f(x) = F'(x) = -\frac{1}{b}[\cos 3x - 3(x-a)\sin 3x] + \frac{3}{c}\cos 3x = \frac{3}{b}(x-a)\sin 3x + \left(\frac{3}{c} - \frac{1}{b}\right)\cos 3x.$$

Đồng nhất hai vế của  $f(x)$  ta được

$$\begin{cases} a=2 \\ \frac{3}{b}=1 \\ \frac{3}{c} - \frac{1}{b}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=9 \end{cases}.$$

Vậy  $ab+c = 2.3+9 = 15$ .

**Câu 193.** Ta có  $f(x) = \left(\int f(x) dx\right)' \Rightarrow 2x^2 e^{x^3+2} + 2xe^{2x} = (me^{x^3+2} + nxe^{2x} - pe^{2x} + C)'$

$$\Leftrightarrow 2x^2 e^{x^3+2} + 2xe^{2x} = 3mx^2 e^{x^3+2} + ne^{2x} + 2nxe^{2x} - 2pe^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 e^{x^3+2} + 2xe^{2x} = 3mx^2 e^{x^3+2} + (n-2p)e^{2x} + 2nxe^{2x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3m = 2 \\ 2n = 2 \\ n - 2p = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = 1 \\ p = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow m + n + p = \frac{13}{6}.$$

**Câu 194.** Ta có

$$F'(x) = (2ax + b)\sqrt{2x-3} + (ax^2 + bx + c)\frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

$$= \frac{(2ax + b)(2x-3) + ax^2 + bx + c}{\sqrt{2x-3}} = \frac{5ax^2 + (3b-6a)x + c - 3b}{\sqrt{2x-3}}$$

$$\text{Vì } F'(x) = f(x) \Leftrightarrow 5ax^2 + (3b-6a)x + c - 3b = 20x^2 - 30x + 11$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 20 \\ 3b - 6a = -30 \\ c - 3b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \\ c = 5 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } T = a + b + c = 4 - 2 + 5 = 7.$$

**Câu 195.** Chọn A

$$\int f(x) = F(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow 2019^x (x^2 - 4)(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow 2019^x (x-2)^2 (x-1)(x+2) = 0$$

Vậy số điểm cực trị của  $F(x)$  là 2.

**Câu 196.** Ta có  $F'(x) = f(x)$

$$\Rightarrow F'(x^2 + x) = f(x^2 + x) \cdot (x^2 + x)' = (2x+1)(x^2 + x)e^{(x^2+x)^2} \left( (x^2 + x)^2 - 4 \right)$$

$$= (2x+1)x(x+1)e^{(x^2+x)^2} (x^2 + x - 2)(x^2 + x + 2)$$

$$= (2x+1)x(x+1)(x+2)(x-1)(x^2 + x + 2)e^{(x^2+x)^2} = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ -2; -1; \frac{-1}{2}; 0; 1 \right\}$$

$F'(x^2 + x) = 0$  có 5 nghiệm đơn nên  $F(x^2 + x)$  có 5 điểm cực trị.

**Câu 197.** + Tính  $(F(x))' = ((ax^2 + bx + c)e^{-x})' = [-ax^2 + (2a-b)x + b - c]e^{-x} = (2x^2 - 5x + 2)e^{-x}$ .

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = -2 \\ 2a - b = -5 \\ b - c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases} \text{ nên } F(x) = (-2x^2 + x - 1)e^{-x}.$$

+ Tính  $F(0) = -1$  suy ra  $f(F(0)) = f(-1) = 9e$ .

**Câu 198.** Chọn



Ta có: 
$$F(x) = \int \frac{(1 + \cos^2 x)(\sin x + \cot x)}{\sin^4 x} dx = \int \frac{(1 + \cos^2 x)\sin x}{\sin^4 x} dx + \int \frac{(1 + \cos^2 x)\cot x}{\sin^4 x} dx$$

Gọi  $A = \int \frac{(1 + \cos^2 x)\cot x}{\sin^4 x} dx$  và  $B = \int \frac{(1 + \cos^2 x)\sin x}{\sin^4 x} dx$

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \int \frac{(1 + \cos^2 x)\cot x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{(1 + 2\cot^2 x)\cot x}{\sin^2 x} dx = -\int (\cot x + 2\cot^3 x) \cdot d(\cot x) \\ &= -\left(\frac{\cot^2 x}{2} + \frac{\cot^4 x}{2}\right) + C_1. \end{aligned}$$

$$B = \int \frac{(1 + \cos^2 x)\sin x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{(1 + \cos^2 x)\sin x}{(1 - \cos^2 x)^2} dx$$

Đặt  $t = \cos x$ , suy ra  $dt = -\sin x \cdot dx$ . Khi đó:

$$\begin{aligned} B &= -\int \frac{1+t^2}{(t^2-1)^2} dt = -\int \frac{1+t^2}{(t-1)^2 \cdot (t+1)^2} dt = -\frac{1}{2} \int \left[ \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2} \right] dt = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} \right) + C_2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\cos x - 1} + \frac{1}{\cos x + 1} \right) + C_2 \end{aligned}$$

Do đó:

$$F(x) = A + B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\cos x - 1} + \frac{1}{\cos x + 1} \right) - \left( \frac{\cot^2 x}{2} + \frac{\cot^4 x}{2} \right) + C$$

Suy ra:

$$F(x) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\cos x - 1} + \frac{1}{\cos x + 1} \right) - \left( \frac{\cot^2 x}{2} + \frac{\cot^4 x}{2} \right) + C = C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos x - 1} + \frac{1}{\cos x + 1} - \cot^2 x - \cot^4 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} = 0$$

Với điều kiện  $\sin x \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}
 (*) \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2 + \cos x + \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2(1 - \cos^2 x) + \cos x(1 - \cos^2 x) + \cos^3 x = 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ -2\cos^2 x + \cos x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Theo giả thiết  $x \in (0; 4\pi)$  nên  $x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi; x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi;$

$$x = \alpha; x = \alpha + 2\pi;$$

$$x = \beta; x = \beta + 2\pi.$$

Khi đó tổng các nghiệm này sẽ lớn hơn  $9\pi$ .

**Câu 199.** Ta có:

$$\begin{aligned}
 \int f(x) dx &= \int \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x} dx = 2 \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx - \int \frac{1}{\sin^2 x} dx \\
 &= 2 \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} - \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + C
 \end{aligned}$$

Do  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$  trên khoảng  $(0; \pi)$  nên hàm số  $F(x)$  có công thức dạng  $F(x) = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + C$  với mọi  $x \in (0; \pi)$ .

Xét hàm số  $F(x) = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + C$  xác định và liên tục trên  $(0; \pi)$ .

$$F'(x) = f(x) = \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$$

$$\text{Xét } F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Trên khoảng  $(0; \pi)$ , phương trình  $F'(x) = 0$  có một nghiệm  $x = \frac{\pi}{3}$

Bảng biến thiên:

$x$	$0$	$\frac{\pi}{3}$	$\pi$	
$F'(x)$		$+$	$0$	$-$
$F(x)$			$-\sqrt{3}+C$	

$$\max_{(0;\pi)} F(x) = F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} + C$$

Theo đề bài ta có,  $-\sqrt{3} + C = \sqrt{3} \Leftrightarrow C = 2\sqrt{3}$ .

$$\text{Do đó, } F(x) = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + 2\sqrt{3}.$$