## DẠNG 1: TÍNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG.

**Phương pháp:**

Để tính góc giữa hai đường thẳng  trong không gian ta có thể thực hiện theo hai cách

***Cách 1.*** Tìm góc giữa hai đường thẳng  bằng cách chọn một điểm  thích hợp (  thường nằm trên một trong hai đường thẳng).



Từ  dựng các đường thẳng lần lượt song song ( có thể tròng nếu  nằm trên một trong hai đường thẳng) với  và . Góc giữa hai đường thẳng chính là góc giữa hai đường thẳng.

**Lưu ý 1:** Để tính góc này ta thường sử dụng định lí côsin trong tam giác

.

***Cách 2.*** Tìm hai vec tơ chỉ phương của hai đường thẳng 

Khi đó góc giữa hai đường thẳng  xác định bởi .

**Lưu ý 2:** Để tính  ta chọn ba vec tơ không đồng phẳng mà có thể tính được độ dài

và góc giữa chúng,sau đó biểu thị các vec tơ  qua các vec tơ  rồi thực hiện các tính toán

**Câu 1:** Cho tứ diện  có ,  (,  lần lượt là trung điểm của  và ). Số đo góc giữa hai đường thẳng  và  là

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

Gọi ,  lần lượt là trung điểm , .

Ta có:

 là hình thoi.

Gọi  là giao điểm của  và .

Ta có: .

Xét  vuông tại , ta có: .

Mà: .

**Câu 2:** Cho hình hộp . Giả sử tam giác  và  đều có 3 góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng  và  là góc nào sau đây?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**

Ta có:  (tính chất của hình hộp)

 (do giả thiết cho  nhọn).

**Câu 3:** Cho tứ diện đều  (Tứ diện có tất cả các cạnh bằng nhau). Số đo góc giữa hai đường thẳng  và  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**

Gọi  là tâm đường tròn ngoại tiếp .

Gọi  là trung điểm   (do  đều).

Do .

Ta có: .

**Câu 17.** [1H3-2] Cho tứ diện đều ,  là trung điểm của cạnh . Khi đó  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn A.**

Không mất tính tổng quát, giả sử tứ diện  có cạnh bằng .

Gọi  là tâm đường tròn ngoại tiếp .

Gọi  là trung điểm  

Ta có: .

Do các mặt của tứ diện đều là tam giác đều, từ đó ta dễ dàng tính được độ dài các cạnh của : , .

Xét , ta có: .

Từ đó: .

**Câu 4:** Cho hình chóp  có đáy là hình vuông  cạnh bằng  và các cạnh bên đều bằng . Gọi  và  lần lượt là trung điểm của  và . Số đo của góc  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**

Gọi  là tâm của hình vuông   là tâm đường tròn ngoại tiếp của hình vuông  (1).

Ta có:  nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông  (2).

Từ (1) và (2) .

Từ giả thiết ta có:  (do  là đường trung bình của ). .

Xét , ta có:  vuông tại  .

.

**Câu 5:** Cho hình chóp  có tất cả các cạnh đều bằng . Gọi  và  lần lượt là trung điểm của  và . Số đo của góc  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

Gọi  là tâm của hình vuông   là tâm đường tròn ngoại tiếp của hình vuông  (1).

Ta có:  nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông  (2).

Từ (1) và (2) .

Từ giả thiết ta có:  (do  là đường trung bình của ). .

Mặt khác, ta lại có  đều, do đó .

**Câu 6:** Cho tứ diện  có . Gọi , , ,  lần lượt là trung điểm của , , , . Góc giữa  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**

Từ giả thiết ta có:  (tính chất đường trung bình trong tam giác)

Từ đó suy ra tứ giác  là hình bình hành.

Mặt khác:  là hình thoi  (tính chất hai đường chéo của hình thoi)

.

**Câu 7:** Cho hình lập phương . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ  và?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn B.**



**Câu 8:** Trong không gian cho hai hình vuông  và  có chung cạnh  và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm và . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ  và?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**

Vì  và  là hình vuông nên  là hình bình hành

Mà  là tâm của 2 hình vuông nên  là trung điểm của  và   là đường trung bình của 

Mặt khác,  nên 

**Câu 9:** Cho tứ diện  có  và . Gọi  và  lần lượt là trung điểm của  và  Hãy xác định góc giữa cặp vectơ  và ?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn B.**

Ta có  và  là 2 tam giác đều,  là trung điểm của  nên  (2 đường trung tuyến của 2 tam giác đều chung cạnh ) nên  là tam giác cân ở . Do đó 

**Câu 10:** Cho hình chóp  có  và . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ  và ?

**A. .** **B. .** **C. .** **D. .**

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**

Ta có: .

Do đótam giác  đều. Gọi  là trọng tâm của tam giác .

Vì hình chóp  có 

nên hình chiếu của  trùng với 

Hay .

Ta có: 

Suy ra .

Vậy góc giữa cặp vectơ  và  bằng .

**Câu 11:** Cho tứ diện có  và . Gọi  và  lần lượt là trung điểm của  và . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ  và ?

**A. .** **B. .** **C. .** **D. .**

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn B.**

Xét tam giác có  là trung điểm đoạn .

Ta có: 

Vì tam giác  có  và 

Nên tam giác đều. Suy ra: 

Tương tự ta có tam giác  đều nên .

Xét .

Suy ra . Hay góc giữa cặp vectơ  và  bằng .

**Câu 12:** Cho tứ diện  có trọng tâm . Chọn khẳng định đúng?

**A. .**

**B. .**

**C. .**

**D. .**

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn B.**

****

Lại có:



Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

**Câu 13:** Cho tứ diện  có hai mặt  và  là các tam giác đều. Góc giữa  và  là?

**A. .**  **B. .**

**C. .** **D. .**

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

Gọi  là trung điểm của 

Vì  và  là các tam giác đều

Nên .

Suy ra .

**Câu 14:** Cho hình chóp  có tất cả các cạnh đều bằng. Gọi  và  lần lượt là trung điểm của  và . Số đo của góc  bằng:

**A. .**  **B. .** **C. .** **D. .**

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**

Gọi  là tâm của hình thoi .

Ta có: .

Nên góc giữa  và  bằng góc giữa  và .

Xét tam giác  có

.

Nên tam giác đều.

Vậy góc giữa  và  bằng góc giữa  và 

bằng góc .

**Câu 15:** Cho hình hộp . Giả sử tam giác  và  đều có 3 góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng  và  là góc nào sau đây?

**A. .** **B. .** **C. .** **D. .**

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn B.**

Ta có:  nên góc giữa hai đường thẳng  và 

là góc giữa hai đường thẳng  và 

bằng góc nhọn  (Vì tam giác  đều có 3 góc nhọn

**Câu 16:** Cho tứ diện đều . Số đo góc giữa hai đường thẳng  và  bằng:

**A. .** **B. .** **C. .** **D. .**

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

Gọi  là trọng tâm tam giác .

Vì tứ diện  đều nên .

Ta có: .

Vậy số đo góc giữa hai đường thẳng  và  bằng 

**Câu 17:** Cho tứ diện  có hai cặp cạnh đối vuông góc. Cắt tứ diện đó bằng một mặt phẳng song song với một cặp cạnh đối diện của tứ diện. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

**A.** Thiết diện là hình chữ nhật. **B.** Thiết diện là hình vuông.

**C.** Thiết diện là hình bình hành. **D.** Thiết diện là hình thang.

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn A.**

Gỉa sử thiết diện là tứ giác .

Ta có:  và  nên  là hình bình hành

Lại có 

Vậy tứ giác  là hình chữ nhật.

**Câu 18:** Cho tứ diện . Chứng minh rằng nếu  thì , , . Điều ngược lại đúng không?

Sau đây là lời giải:

*Bước 1*: 

*Bước 2*: Chứng minh tương tự, từ  ta được  và  ta được .

*Bước 3*: Ngược lại đúng, vì quá trình chứng minh ở bước 1 và 2 là quá trình biến đổi tương đương.

Bài giải trên đúng hay **sai**?Nếu sai thì sai ở đâu?

**A.** Sai ở bước 3. **B.** Đúng **C.** Sai ở bước 2. **D.** Sai ở bước 1.

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn B.**

Bài giải đúng.

**Câu 19:** Cho hình chóp  có  và . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ  và ?

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn D.**

Ta có: 



Vì  và 

Do đó: 

**Câu 20:** Cho hình chóp  có đáy là hình vuông  cạnh bằng  và các cạnh bên đều bằng . Gọi  và  lần lượt là trung điểm của  và . Số đo của góc  bằng:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

Ta có: 



 vuông tại .

Khi đó: 



**Câu 21:** Cho hình lập phương . Chọn khẳng định **sai?**

**A.** Góc giữa  và  bằng . **B.** Góc giữa  và  bằng .

**C.** Góc giữa  và  bằng . **D.** Góc giữa  và  bằng .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn B.**

Ta có: 



(vì  và )

Do đó: 

**Câu 22:** Cho hình lập phương  có cạnh . Gọi  là trung điểm . Giá trị  là:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn A.**

Ta có: 



**Câu 23:** Cho hình hộp  có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có thể **sai**?

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn B.**

Ta có: 



Vì  và  là hai hình thoi bằng nhau nên

+  suy ra  không vuông góc với 

+  suy ra 

Nên đáp án B có thể sai vì chưa có điều kiện của góc  và 

Chọn **B.**

**Câu 24:** Cho hình lập phương . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ  và?

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

Ta có:  (do  là hình chữ nhật)



**Câu 25:** Cho tứ diện  đều cạnh bằng . Gọi  là trung điểm ,  là góc giữa  và . Chọn khẳng định đúng?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

Gọi  là trọng tâm của  

Trên đường thẳng  qua  và song song  lấy điểm  sao cho  là hình chữ nhật, từ đó suy ra: 

Có:  và 



 ; 

**Câu 26:** Trong không gian cho hai tam giác đều  và  có chung cạnh  và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi  lần lượt là trung điểm của các cạnh  và . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ  và ?

**A.** 450 **B.** 1200 **C.** 600 **D.** 900

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn C.**

Gọi  là trung điểm 

 cân tại  

 cân tại  



Kết luận: góc giữa  và  là 

**Câu 27:** Cho  góc giữa  và  bằng . Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng đính sau?

**A. **  **B. ** **C. ** **D. **

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn A.**

Ta có:  

**Câu 28:** Cho hình lập phương . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ  và ?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Hướng dẫn giải:***

**Chọn B.**

Đặt cạnh của hình lập phương trên là 

Gọi  là giao trung điểm 

Qua  kẻ đường thẳng 

Qua  kẻ đường thẳng 

Suy ra  cắt  tại .

Từ đó suy ra 







**Câu 29:** Cho tứ diện  có  và . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ  và  ?

**A. .** **B. .** **C. .** **D. .**

***Hướng dẫn giải:***

Ta có





**Câu 30:** Cho hình lập phương . Góc giữa  và  là

**A. .** **B. .** **C. .** **D. .**

***Hướng dẫn giải:***

Vì  nên góc giữa  và  là .

Vì tam giác  đều nên .

Vậy góc giữa  và  bằng **.**

**Câu 31:** Cho hình chóp  có  và . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ  và  ?

**A. .** **B. .** **C. .** **D. .**

***Hướng dẫn giải:***

Ta có





**Câu 32:** Cho tứ diện đều ,  là trung điểm của cạnh . Khi đó  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

Giả sử cạnh của tứ diện là .

Ta có 

Mặt khác

Do có . Suy ra .

**Câu 33:** Cho tứ diện  có  vuông góc với , .  là điểm thuộc cạnh  sao cho .  song song với  và  lần lượt cắt  tại . Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu ?

**A. .** **B. .** **C. .** **D. .**

***Hướng dẫn giải:***

Xét tứ giác  có 

 là hình bình hành.

Mặt khác, .

Do đó,  là hình chữ nhật.

Vì  nên .

Theo giả thiết .

Vì  nên .

Diên tích hình chữ nhật  là

.

Ta có  khi 

Vậy diện tích tứ giác  lớn nhất bằng 9 khi  là trung điểm của .

**Câu 34:** Cho tứ diện  đều cạnh bằng . Gọi  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác . Góc giữa  và  bằng bao nhiêu ?

**A. .** **B. .** **C. .** **D. .**

***Hướng dẫn giải:***

Ta có 



Suy ra .

**Câu 35:** Cho tứ diện  có . Gọi  lần lượt là trung điểm của . Góc  bằng

**A. .** **B. **. **C. .** **D. .**

***Hướng dẫn giải:***

Tứ giác  là hình bình hành.

Mặt khác  mà  nên .

Do đó  là hình thoi.

Suy ra .

**Câu 36:** Cho tứ diện  với . Gọi  là góc giữa  và . Chọn khẳng định **đúng** ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***

Ta có 

Mặt khác



Do có . Suy ra .

**Câu 37:** Trong không gian cho hai hình vuông  và  có chung cạnh  và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm  và . Tứ giác  là hình gì?

**A.** Hình bình hành. **B.** Hình vuông. **C.** Hình thang. **D.** Hình chữ nhật.

***Hướng dẫn giải:***

Tứ giác  là hình bình hành. Lại có: 

Vậy tứ giác  là hình chữ nhật.

**Câu 38:** Cho tứ diện  có (  lần lượt là trung điểm của  và ). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là :

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

***Hướng dẫn giải:***

Gọi M là trung điểm của A**C.**

Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng góc giữa hai đường thẳng MI và MJ.

Tính được: 

Từ đó suy ra số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là: 

**Câu 38:** Cho tứ diện  với . Gọi  lần lượt là trung điểm của  và . Góc giữa  và  là?

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

***Hướng dẫn giải:***



**Câu 39:** Cho hai vectơ  thỏa mãn: . Gọi  là góc giữa hai vectơ . Chọn khẳng định đúng?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải:***



Do đó: .

**Câu 40:** Cho tứ diện . Tìm giá trị của k thích hợp thỏa mãn: 

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

***Hướng dẫn giải:***



**Chọn đáp án C.**

**Câu 41:** Trong không gian cho tam giác  có trọng tâm . Chọn hệ thức đúng?

**A.** 

**B.** 

**C.** 

**D.** 

***Hướng dẫn giải:***

***Cách 1***

Ta có



***Cách 2***: Ta có:



Tương tự ta suy ra được



Chọn đáp án **D.**

***Cách 3***: Chuẩn hóa giả sử tam giác đều có cạnh là  Khi đó



Chọn đáp án **D.**

**Câu 42:** Trong không gian cho tam giác . Tìm  sao cho giá trị của biểu thức  đạt giá trị nhỏ nhất.

**A.**  là trọng tâm tam giác .

**B.**  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác .

**C.**  là trực tâm tam giác .

**D.**  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác .

***Hướng dẫn giải:***

Gọi  là trọng tâm tam giác  cố định và 



Dấu bằng xảy ra 

Vậy  với  là trọng tâm tam giác 

**Chọn đáp án A.**

**Câu 43:** Cho hai vectơ  thỏa mãn: . Độ dài vectơ  bằng?

**A.**  **B.** . **C.**  **D.** .

***Hướng dẫn giải:***



**Câu 44:** Cho tứ diện  có  và . Trong các mặt của tứ diện đó:

**A.** Tam giác  có diện tích lớn nhất. **B.** Tam giác  có diện tích lớn nhất.

**C.** Tam giác  có diện tích lớn nhất. **D.** Tam giác  có diện tích lớn nhất.

***Hướng dẫn giải:***

Đặt 

Tam giác  đều cạnh  nên diện tích .

Tam giác  vuôn tại  nên diện tích .

Diện tích tam giác  là .

Tam giác  có  nên tam giác  vuông tại . Diện tích tam giác  là .

Vậy diện tích tam giác  lớn nhất.

**Câu 45:** Cho hai vectơ  thỏa mãn: . Xét hai vectơ  . Gọi α là góc giữa hai vectơ . Chọn khẳng định đúng.

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

***Hướng dẫn giải:***

Ta có .

.

.



**Câu 46:** Cho tam giác có diện tích . Tìm giá trị của  thích hợp thỏa mãn: .

**A. **. **B.** k = 0. **C. **. **D. **.

***Hướng dẫn giải:***



.

**Chọn C.**

**Câu 47:** Cho tứ diện  có hai mặt  và  là các tam giác đều

a) Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

**A.** AB và CD chéo nhau

**B.** AB và CD vuông góc với nhau

**C.** AB và CD đồng phẳng

**D.** AB và CD cắt nhau

b) Gọi  lần lượt là trung điểm các cạnh . Khẳng định nào sau đây là đúng nhất?

Chứng minh  là hình chữ nhật.

**A. ** là hình vuông **B. ** là hình bình hành

**C. ** là hình chữ nhật **D. ** là hình thoi

***Hướng dẫn giải:***

a) Đặt 

Ta có 



Vậy .

b) Ta có  và  nên tứ giác  là hình bình hành.

Lại có , do đó  là hình chữ nhật.

**Câu 48:** Cho hình chóp  có  và . Tính góc giữa hai đường thẳng  và .

**A.  B. **

**C.  D. **

***Hướng dẫn giải:***

Gọi  lần lượt là trung điểm của , khi đó  nên

.

Đặt , trong tam giác  có

.

Ta có ,  vuông tại , vì vậy , .Trong tam giác  theo công thứ tính đường trung tuyến ta có

.

Thay  vào ta được .

Vậy .

**Câu 49:** Cho hình chóp  có đáy  là hình thoi,  và .

a) Tính góc giữa hai đường thẳng  và .

**A.  B.  C.  D. **

b) Gọi  lần lượt là các điểm thuộc  và  sao cho . Chứng minh góc giữa  và  không phụ thuộc vào vị trí của  và .

**A.  B.  C.  D. **

***Hướng dẫn giải:***

a)  b) .

**Câu 50:** Cho hai tam giác cân  và  có chung cạnh đáy  nằm trong hai mặt phẳng khác nhau.

a) Khẳng định nào sau đây là đúng nhất?

**A.  B.** AD cắt BC

**C.** AD và BC chéo nhau **D.** Cả A, B, C đều đúng

b) Gọi  là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng  và  sao cho . Tính góc giữa hai đường thẳng  và .

**A.  B. **

**C.  D. **

***Hướng dẫn giải:***

a) Gọi  là trung điểm của , thì các tam giác

và  cân nên .

Ta có 

Vậy .

b) Ta có ,  

suy ra ( Theo câu a)

**Câu 51:** Cho hình hộp thoi  có tất cả các cạnh đều bằng  và .Tính góc giữa hai đường thẳng AC và B’D’.

**A.  B.  C.  D. **

***Hướng dẫn giải:***

**HS** tự giải.

**Câu 52:** Cho tứ diện . Gọi  lần lượt là trung điểm các cạnh  và . Cho biết  và . Tính góc giữa hai đường thẳng  và .

**A.  B. **

**C.  D. **

***Hướng dẫn giải:***

Gọi  là trung điểm của , ta có .



Áp dụng định lí côsin cho tam giác  ta có

.

Vậy .

**Câu 53:** Cho tứ diện  có .

a)Khẳng định nào sau đây là **đúng nhất**.

**A.** các đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối thì vuông góc với hai cạnh đó

**B.** các đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối thì không vuông góc với hai cạnh đó

**C.** các đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối thì *có thể vuông góc có thể không vuông góc* với hai cạnh đó

**D.** cả A, B, C đều sai

b) Tính góc giữa hai đường thẳng  và .

**A. **

**B. **

**C. **

**D. **

***Hướng dẫn giải:***

Gọi  lần lượt là trung điểm của các cạnh .

a) Do hai tam giác  và  có  chung và  nên chúng bằng nhau, suy ra 

Vậy tam giác  cân tại  và có trung tuyến  nên .

Tương tự .

Chứng minh tương tự cho hai cặp cạnh đối còn lại.

b) Ta có 

Theo công thức tính đường trung tuyến ta có



Tương tự , nên 

Áp dụng định lí cô sin cho tam giác  ta có



Vậy .