**12. HÌNH VUÔNG**

**I. KIẾN THỨC CƠ BẢN**

**Định nghĩa:** hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau

 Tứ giác  là hình vuông 

Từ định nghĩa hình vuông suy ra

- Hình vuông là hình chữ nhật có bốn cạnh bằng nhau.

- Hình vuông là hình thoi có bốn góc bằng nhau.

**Tính chất:** Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi

**Dấu hiệu nhận biết:**

**-** Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.

**-** Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc nhau là hình vuông.

**-** Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông.

**-** Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.

**-** Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

**III. BÀI TẬP**

**Bài 1:** Cho hình vuông  . Trên cạnh AB, BC, CD, DA, lần lượt lấy các điểm E, F, G, H sao cho  . Chứng minh  là hình vuông.

**Bài 2:** Cho hình chữ nhật  có  . Gọi E, F theo thứ tụ là trung điểm của AB, CD. Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE.

a) Tứ giác  là hình gì? Vì sao?

b) Tứ giác  là hình gì? Vì sao?

**Bài 3:** Cho hình chữ nhật . Vẽ các tam giác vuông cân  ,  , I và K nằm trong hình chữ nhật. Gọi E là giao điểm của AI và DK, F là giao điểm của BI và CK. Chứng minh rằng:

a) EF song song với CD.

b)  là hình vuông.

**Bài 4:** Cho hình bình hành ABCD.Ở phía ngoài hình bình hành vẽ các hình vuông ADEF và ABGH .Gọi O là giao điểm các đường chéo của hình vuông ADEF. Chứng minh rằng.

a)  b)  c) 

**Bài 5:**  Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

a) Chứng minh AN = DM và 

b) Chứng minh rằng các đoạn thẳng DM, AN, BP, CQ giao nhau tạo thành một hình vuông.

c) Gọi E là giao điểm của DM và AN. Chứng minh CE = CD.

**Bài 6:**  Cho tứ giác ABCD có  và  . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD, BD. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình vuông.

**Bài 7:** Cho hình vuông ABCD. Gọi E, F lần lượt trên cạnh AB, AD sao cho  . Chứng minh rằng  và 

**Bài 8:** Cho tam giác ABC cân tại A , các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Tia phân giác của góc ABD cắt EC và AC theo thứ tự tại M và P. Tia phân giác của góc ACE cắt DB và AB theo thứ tự tại Q và N. Chứng minh rằng:

a) . b) .

c) Tam giác BOC vuông cân. d) MNPQ là hình vuông.

**Bài 9:** Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm M tùy ý trên cạnh BC. Từ M, vẽ một đường thẳng cắt cạnh CD tại K sao cho: . Chứng minh .

**Bài tập tự luyện:**

**Bài 10:** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ ra phía ngoài tam giác này các hình vuông ABDE và ACFG. Chứng minh rằng:

1. Ba đường thẳng AH, DE và FG đồng quy;
2. Ba đường thẳng AH, BF và CD đồng quy.

**Bài 11:** Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E. Trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho AE = CF. Gọi O là trung điểm của EF. Vẽ điểm M sao cho O là trung điểm của DM. Chứng minh rằng tứ giác DEMF là hình vuông.

**Bài 12:** Cho tam giác ABC,  Vẽ ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, HB và HC. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình vuông.

**KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ**

**Bài 1:**  Chỉ ra . Từ đó suy ra:

 (c-g-c).

Do đó  (1).

Mặt khác, vì 

Suy ra (2).

(1), (2) suy ra  là hình vuông.

**Bài 2:** a) E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD nên ta có  , do đó dễ thấy  là hình chữ nhật.

Mặt khác . Vậy  là hình vuông.

b) Chứng minh tương tự câu a, ta có BCFE cũng là hình vuông. Do đó hai tam giác MEF và NEF là hai tam giác vuông cân tại M, N. từ đó suy ra  là hình vuông.

**Bài 3:** a) Tam giác KCD cân tại K nên  (1).

 (g.c.g) nên  (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

.

Tam giác vuông KEF có  nên .

Ta lại có:  (2 góc đồng vị bằng nhau).

b) Tam giác EAD có  nên .

Tứ giác EKFI có  nên  là hình chữ nhật.

Lại có  là hình vuông.

**Bài 4:** a) Ta có :  (tính chất đường chéo hình vuông) ;  ( vì ,  ). Vậy  (góc có cạnh tương ứng vuông góc).

b) Xét  và  :

OA = OD (tính chất đường chéo hình vuông)

 ( câu a)

 (cùng bằng AB )

Vậy  (c.g.c) suy ra .

c)  mà  (tính chất đường chéo hình vuông ), nên .Vậy  .

**Bài 5:**  a) Xét hai tam giác ABN và DAM vuông tại B và A, có  và  , do đó 

suy ra  và .

Mà , do đó , hay .

Vậy ta có  và  .

b) Giả sử các đoạn thẳng DM, AN, BP, CQ giao nhau tạo thành tứ giác EFGH.

MB // DP và   là hình bình hành.

Suy ra BP // DM  ANBP.

Tương tự ta cũng có  .

Như vậy tứ giác EFGH có .

\* Ta chứng minh  :

Dễ thấy EM là đường trung bình trong tam giác ABF, E là trung điểm của AF.

Tương tự H là trung điểm của DE.

Xét hai tam giác ABF và DAE vuông tại F là E, có:

 ;  (vì ). Suy ra 

Từ đó ta có EF = EH. Vậy EFGH là hình vuông.

c) H là trung điểm của DE và  , do đó ta suy ra  cân tại C, hay là  .

**Bài 6:** Trong tam giác ABC, MN là đường trung bình nên 

Lập luận tương tự, ta có 

Theo giả thiết, AD = BC suy ra  . Vậy  là hình thoi (1).

Mặt khác ta có:

 (góc đồng vị). theo giả thiết  , suy ra  . Do vậy ta được góc  (2).

Từ (1) và (2) cho ta MNPQ là hình vuông.

**Bài 7:** Gọi I là giao điểm của DE và CF.

Xét hai tam giác ADE và DCF có:

 (vì ABCD là hình vuông).

 .

 (theo giả thiết)

Vậy  , khi đó ta có:

 và  .

Mặt khác  , suy ra  . Vậy  .

**Bài 8:**

a)  (cùng phụ với ).

b) Ta có:  mà  (chứng minh trên)

****.

.

c) Tam giác OBC có 

nên 

 cân tại O (1).

Mặt khác, vì  nên ta có:



 (2).

Từ (1) và (2) suy ra  vuông cân.

d) Tam giác OBC cân tại O nên  (3).

 (g.c.g),  (4).

Từ (3) và (4) suy ra: 

Mà  cân tại B có đường cao BO cũng là đường trung tuyến nên O là trung điểm của QN hay .

Tương tự ta có .

 là hình thoi.

Ta lại có:  nên MNPQ là hình vuông

**Bài 9:** MA là phân giác góc BMK nên MA là trục đối xứng của hai đường thẳng MK và MB.

****Gọi I là điểm đối xứng của K qua MA, suy ra I thuộc đường thẳng BC.

Ta có  ,  .

Hai tam giác vuông ABI và ADK có hai cạnh bằng nhau nên .

Từ đó ta có .

. Vậy ta có: .